

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 15. Mai, 12:00 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

(i) Sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Z_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|Z_n - Z\|_{L^2(\mathbb{P})} \rightarrow 0 \text{ für eine Zufallsvariable } Z.$$

Zeigen Sie, dass $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in [0, \infty)$ und bestimmen Sie μ und σ^2 .

Hinweis: Benutzen Sie charakteristische Funktionen.

(ii) Sei W eine \mathbb{R} -wertige Brownsche Bewegung und $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar mit $\int_0^T \sigma(t)^2 dt < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sigma \bullet W(T) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ für gewisse $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_0^2 \in [0, \infty)$. Bestimmen Sie μ_0 und σ_0^2 .

Hinweis: Benutzen Sie Teil (i) dieser Aufgabe und Theorem 27.

Aufgabe 2

Sei M ein stetiges L^2 -Martingal und A ein stetiger Prozess von endlicher Variation. Sei weiter $\alpha > 0$ und $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge vorhersagbarer Prozesse mit

$$H_n(t, \omega) \rightarrow H(t, \omega) \quad \text{und} \quad |H_n(t, \omega)| \leq \alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[|H_n \bullet A(t) - H \bullet A(t)| + |H_n \bullet M(t) - H \bullet M(t)| \right] \rightarrow 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3

Sei M ein lokales Martingal, H und K zwei M -integrierbare Prozesse. Zeigen Sie, dass

$$H \bullet M = K \bullet M \quad \text{genau dann wenn} \quad H = K \quad \mu - \text{a.e.},$$

wobei μ das Doléans-Maß ist.

Aufgabe 4

Sei W eine Brownsche Bewegung und $\mu_k(t) \triangleq \mathbb{E}[W(t)^k]$ für alle $t \in [0, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô Formel, dass

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1) \int_0^t \mu_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

Berechnen Sie damit $\mathbb{E}[W(t)^4]$.