Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 08. Mai, 12:00 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1
Sei M ein lokales Martingal mit $M(0) = 0$ und $\langle M\rangle(T) = 0$. Zeigen Sie, dass $M(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$.

Aufgabe 2
Sei $M = \{M(t)\}_{t=0,\dots,T}$ ein zeitdiskretes lokales Martingal mit

$$\mathbb{E}[M(t)^-] < \infty \qquad \text{für alle } t \in \{0, \dots, T\}.$$

Zeigen Sie, dass M ein echtes Martingal ist.

Aufgabe 3
Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und

$$\tau \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : W(t) = 1\big\}.$$

Sei $B = W(\cdot \wedge \tau)$ und definiere einen Prozess $M = \{M(t)\}_{t\in[0,1]}$ durch

$$M(t) \triangleq \begin{cases} B(t/(1-t)) & \text{falls } t \in [0, 1), \\ 1 & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass M ein lokales Martingal aber kein echtes Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^M$ ist.

Aufgabe 4
Seien X und Y stetige, adaptierte Prozesse und $\pi = [t_0, \dots, t_n]$ eine Partition. Definiere einen Prozess $\langle X, Y\rangle_\pi$ durch

$$\langle X, Y\rangle_\pi(t) \triangleq \textstyle\sum_{k=1}^n \,\mathrm{d}X(t_{k-1}, t \wedge t_k)\,\mathrm{d}Y(t_{k-1}, t \wedge t_k) \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass wenn X von endlicher Variation ist, dass dann

$$\sup_{t\in[0,T]} |\langle X, Y\rangle_\pi(t)| \to 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit für } |\pi| \downarrow 0.$$