# Stochastische Analysis und Mathematical Finance

## Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 17. April, 12:00 Uhr, Postkasten E14.

**Aufgabe 1**

(a) Zeichnen Sie Auszahlungsdiagramme zu folgenden Strategien. Wie muss sich der Markt entwickeln, damit der Investor einen Gewinn erzielt?

(i) *Bearish Spread*: Kaufe einen europäischen Call mit Strike $K_1$ und verkaufe einen weiteren europäischen Call mit derselben Maturity und Strike $K_2 < K_1$.

(ii) *Strangle*: Kaufe einen europäischen Put mit Strike $K_1$ und kaufe einen europäischen Call mit derselben Maturity und Strike $K_2 > K_1$.

(b) Stellen Sie ein Portfolio aus europäischen Calls und Puts mit Maturity $T$ und Underlying $S$ zusammen, um ein Auszahlungsprofil zu erhalten, so dass...

(i) ... Sie einen Gewinn machen, falls sich der Preis $S(T)$ des Underlyings zum Zeitpunkt $T$ im Vergleich zum heutigen Preis $S(t)$ nicht signifikant ändert.

(ii) ... Ihr Gewinn zunächst (als Funktion von $S(T)$) linear wächst, falls $S(T)$ größer als der heutige Preis $S(t)$ ist, und Ihr Gewinn konstant ist, falls $S(T)$ deutlich größer als der heutige Preis $S(t)$ ist.

**Aufgabe 2**

Wir betrachten eine Aktie mit Dividendenzahlungen und nehmen an, dass der Aktienpreis direkt vor einer Dividendenzahlung von $D > 0$ durch $S$ gegeben ist. Wie hoch ist der Aktienpreis direkt nach der Dividendenzahlung? Begründen Sie Ihre Antwort mit Arbitrageargumenten.

**Aufgabe 3**

Angenommen, Sie erhalten die folgenden Preisangaben:

$$C(t) = 11.42, \quad P(t) = 3.94, \quad P^a(t) = 5.67, \quad p(t,T) \triangleq e^{-0.02}, \quad S(t) = 67.13.$$

Existiert eine Arbitragemöglichkeit? Falls ja, wie sieht die Arbitragemöglichkeit aus?

**Aufgabe 4**

Sei $p(t,T) \leq 1$ für alle $T > 0$ und $t \leq T$. Beweisen Sie die folgenden Preisschranken.

(i) Sei $C_1$ ein europäischer Call mit Maturity $T$ und Strike $K_1$ und sei $C_2$ ein europäischer Call mit Maturity $T$ und Strike $K_2 > K_1$. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq \big(K_2 - K_1\big)p(t,T) \qquad \text{für alle } t \leq T.$$

(ii) Sei $C_1$ ein europäischer Call mit Maturity $T_1$ und Strike $K$ und sei $C_2$ ein europäischer Call mit Maturity $T_2 > T_1$ und Strike $K$. Zeigen Sie, dass

$$C_1(t) \leq C_2(t) \qquad \text{für alle } t \leq T_1.$$

⟶ Zweite Seite nicht vergessen!

**Definition 1** (Cox-Ross-Rubinstein Modell / Binomialmodell)
Seien $-1 < d < u$, $r \in \mathbb{R}$, $s > 0$ und $p \in (0,1)$. Das *Cox-Ross-Rubinstein Modell* bzw. *Binomialmodell* ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$\begin{array}{lll l} S^0(0) = 1 & \text{und} & S^0(t) = S^0(t-1)(1+r) = (1+r)^t & t = 1,\dots,T, \\ S^1(0) = s & \text{und} & S^1(t) = S^1(t-1)(1+R_t) = s\prod_{u=1}^t (1+R_u) & t = 1,\dots,T, \end{array}$$

wobei $\{R_t\}_{t=1,\dots,T}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind und

$$\mathbb{P}[R_1 = u] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[R_1 = d] = 1-p.$$

**Aufgabe 5**
Sei $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ die Auszahlungsfunktion einer Option auf $S^1$ im Cox-Ross-Rubinstein Modell $S = (S^0, S^1)$ mit $d < r < u$.

(i) Sei $T = 1$. Bestimmen Sie eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi$, so dass

$$X^\varphi(T) = g(S^1(T)).$$

Eine solche Strategie nennen wir Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$.

(ii) Sei $T = 2$. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$ für den Spezialfall

$$g(s) \triangleq \max\{s - K, 0\}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

unter der Annahme $K = s(1+d)(1+u)$.

**Definition 2** (Trinomialmodell)
Das *Trinomialmodell* ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$\begin{array}{lll l} S^0(0) = 1 & \text{und} & S^0(t) = S^0(t-1)(1+r) = (1+r)^t & t = 1,\dots,T, \\ S^1(0) = s & \text{und} & S^1(t) = S^1(t-1)(1+R_t) = s\prod_{u=1}^t (1+R_u) & t = 1,\dots,T, \end{array}$$

wobei $s > 0$ und $\{R_t\}_{t=1,\dots,T}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}[R_1 = d] = 1 - p - p', \qquad \mathbb{P}[R_1 = r] = p', \qquad \mathbb{P}[R_1 = u] = p$$

für $p, p' > 0$ mit $p + p' < 1$ und $-1 < d < r < u$.

**Aufgabe 6**
Wir betrachten das Trinomialmodell $S = (S^0, S^1)$ mit $T = 1$. Für $s(1+d) < K < s(1+u)$ seien

$$C(T) \triangleq \max\{K - S^1(1), 0\} \qquad \text{und} \qquad F(T) \triangleq S^1(1) - K.$$

Gibt es Replikationsstrategien für $C(T)$ bzw. $F(T)$?