Universität Trier

Gleichgradige Integrierbarkeit

Stochastische Prozesse

Gleichgradige Integrierbarkeit und der Satz von Vitali

Definition (Gleichgradig Integrierbar)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ heißt **gleichgradig integrierbar** oder kurz **u.i.** (uniformly integrable), falls

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}\left[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>\alpha\}}\right] = 0.$$

Gleichgradige Integrierbarkeit und der Satz von Vitali

Definition (Gleichgradig Integrierbar)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ heißt **gleichgradig integrierbar** oder kurz **u.i.** (uniformly integrable), falls

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}\left[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>\alpha\}}\right] = 0.$$

Theorem (Satz von Vitali)

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathrm{E}[|X|], \mathrm{E}[|X_n|] < \infty$ für alle n und $X_n \to X$ im Erwartungswert.

(ii) Die Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist u.i. und $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit.

Kriterien für gleichgradige Integrierbarkeit

Lemma (Äquikontinuitätskriterium)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ist genau dann u.i., wenn

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}[|X_i|] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{A\in\mathfrak{A},\mathbb{P}[A]<\delta} \sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = 0.$$

Kriterien für gleichgradige Integrierbarkeit

Lemma (Äquikontinuitätskriterium)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ist genau dann u.i., wenn

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}[|X_i|] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{A\in\mathfrak{A},\mathbb{P}[A]<\delta} \sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = 0.$$

Lemma (L^p-Beschränktheit)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ist u.i., falls ein $p > 1$ existiert, so dass

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{E}\big[|X|^p\big] < \infty.$$

Beispiele

Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

(i) Einelementige Familien: $\{X\}$ ist u.i. falls $\mathrm{E}[|X|] < \infty$.

Beispiele

Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

(i) **Einelementige Familien**: $\{X\}$ ist u.i. falls $\mathrm{E}[|X|] < \infty$.

(ii) **Dominierte Familien**: Existiert eine Zufallsvariable Y mit $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.

Beispiele

Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

(i) Einelementige Familien: $\{X\}$ ist u.i. falls $\mathrm{E}[|X|] < \infty$.

(ii) Dominierte Familien: Existiert eine Zufallsvariable Y mit $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.

(iii) Stochastische Prozesse: Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$

Beispiele

Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

(i) Einelementige Familien: $\{X\}$ ist u.i. falls $\mathrm{E}[|X|] < \infty$.

(ii) Dominierte Familien: Existiert eine Zufallsvariable Y mit $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ u.i.

(iii) Stochastische Prozesse: Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in\mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$

(iv) Bedingte Erwartungswerte: Sei $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Dann gilt

$$\text{die Familie } \left\{\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A} \text{ Teil-}\sigma\text{-Algebra}\right\} \text{ ist u.i.}$$