

## Stochastische Prozesse

### Übungsblatt 12

**Abgabe: Dienstag, 29. Januar, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.**

Im Folgenden seien  $W$  eine eindimensionale Brownsche Bewegung,  $a < 0 < b$  und

$$\tau_a \triangleq \inf\{t \geq 0 : W(t) \leq a\} \quad \text{und} \quad \tau_b \triangleq \inf\{t \geq 0 : W(t) \geq b\}.$$

Die Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  wird als vollständig und rechtsstetig angenommen.

#### Aufgabe 1

Sei  $\theta \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $X = \{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  mit

$$X(t) \triangleq e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t + \theta W(t)}, \quad t \in [0, \infty)$$

ein Martingal ist. Folgern Sie hieraus, dass

$$\mathbb{E}[e^{-y\tau_b}] = e^{-b\sqrt{2y}} \quad \text{für alle } y \in [0, \infty)$$

und  $\tau_b < \infty$  fast sicher.

#### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\tau_a \leq \tau_b] = \frac{b}{b-a} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[\tau_a > \tau_b] = \frac{-a}{b-a}.$$

#### Aufgabe 3

Definiere  $T_b \triangleq \tau_b \mathbb{1}_{\{\tau_b < \infty\}}$  und  $\bar{W} = \{\bar{W}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  durch

$$\bar{W}(t) \triangleq W(t) \mathbb{1}_{\{t < T_b\}} + [2W(T_b) - W(t)] \mathbb{1}_{\{t \geq T_b\}} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass  $\bar{W}$  eine Brownsche Bewegung bezüglich ihrer natürlichen Filtrierung ist.

#### Aufgabe 4

Definiere  $M = \{M(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  durch

$$M(t) \triangleq \sup_{s \in [0, t]} W(s) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[M(t) \geq b, W(t) \leq b - y] = \mathbb{P}[W(t) \geq b + y] \quad \text{für alle } b > 0 \text{ und } y, t \geq 0.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 3.