

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 11

Abgabe: Dienstag, 22. Januar, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1

Sei τ eine Stoppzeit bezüglich einer vollständigen Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. Sei außerdem $\sigma : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ eine Zufallsvariable mit $\tau = \sigma$ fast sicher. Zeigen Sie, dass σ eine Stoppzeit ist.

Aufgabe 2

Sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilter Zufallsvariablen und definiere

$$S_n \triangleq \sum_{k=1}^n Z_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Verteilung von (S_1, \dots, S_n) die folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ besitzt:

$$f(t_1, \dots, t_n) \triangleq \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n\}}, \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transformationssatz für Dichten.

Aufgabe 3

Sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilter Zufallsvariablen und $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ der zugehörige Erneuerungsprozess, d.h.

$$N(t) \triangleq \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^n Z_k \leq t\} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $s, t \in [0, \infty)$ mit $s \leq t$ und alle $j, k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}[N(s) = j, N(t) - N(s) = k] = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^j}{j!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}.$$

Folgern Sie, dass $N(t) - N(s)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t - s)$ und unabhängig von $N(s)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Lévy Prozesse und $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$X \triangleq \sum_{k=1}^n z_k X_k$$

ein Lévy Prozess ist.