

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 10

Abgabe: Dienstag, 15. Januar, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1 (Lévy's Downward Theorem)

Sei \mathcal{T} abzählbar mit $\inf \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ und Z eine Zufallsvariable mit $E[|Z|] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$E[Z|\mathfrak{F}(t)] \rightarrow E[Z|\mathfrak{F}(\inf \mathcal{T})] \text{ a.s. und im Mittel für } t \downarrow \inf \mathcal{T}.$$

Aufgabe 2 (Lévy's Upward Theorem)

Sei \mathcal{T} abzählbar mit $\sup \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ und Z eine Zufallsvariable mit $E[|Z|] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$E[Z|\mathfrak{F}(t)] \rightarrow E[Z|\mathfrak{F}(\sup \mathcal{T})] \text{ a.s. und im Mittel für } t \uparrow \sup \mathcal{T}.$$

Aufgabe 3 (Kolmogorov's 0/1 Gesetz)

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen und

$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_k : k \in \mathbb{N}, k \geq n).$$

Zeigen Sie, dass für alle $\mathfrak{T}(\infty)$ -messbaren Zufallsvariablen Z gilt, dass

$$Z = E[Z] \text{ fast sicher.}$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$, definieren Sie $\mathfrak{F}(n) \triangleq \sigma(X_k : k = 1, \dots, n)$ und wenden Sie Aufgabe 2 auf $\{E[Z|\mathfrak{F}(n)]\}_{n \in \mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 4 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E[|X_1|] < \infty$ und seien $S = \{S(t)\}_{t \in -\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in -\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$S(t) \triangleq \sum_{k=1}^{-t} X_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}(t) \triangleq \sigma(S(r) : r \in -\mathbb{N}, r \leq t) \quad \text{für alle } t \in -\mathbb{N}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $t \in -\mathbb{N}$ gilt

$$E[X_1|\mathfrak{F}(t)] = \dots = E[X_{-t}|\mathfrak{F}(t)] = \frac{1}{-t}S(t) \text{ fast sicher.}$$

Folgern Sie aus Aufgabe 1, dass

$$\frac{1}{-t}S(t) \rightarrow E[X_1|\mathfrak{F}(-\infty)] \text{ a.s. und im Mittel für } t \downarrow -\infty.$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass $E[X_1|\mathfrak{F}(-\infty)] = E[X_1]$ fast sicher. Folgern Sie hieraus das starke Gesetz der großen Zahlen:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow E[X_1] \text{ a.s. und im Mittel.}$$