

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 08. Januar, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1

Sei W eine Brownsche Bewegung und definiere $X = \{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ und $Y = \{Y(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq W(t)^2 - t \quad \text{und} \quad Y(t) \triangleq W(t)^3 - 3tW(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass X und Y Martingale sind.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{T} \triangleq [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f monoton wachsend ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass f genau dann von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Wählen Sie $f_1 \triangleq V_f$ und $f_2 \triangleq V_f - f$.

Aufgabe 3

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ adaptiert mit $E[|X(t)|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass X eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit) darstellbar ist als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \text{ a.s.} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $M = \{M(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist, $A = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein vorhersagbar Prozess ist und $M(0) = A(0) = 0$ fast sicher. Zeigen Sie außerdem, dass X genau dann ein Submartingal ist, wenn A a.s. wachsend ist.

Hinweis: Ein Prozess $A = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ heißt vorhersagbar, wenn gilt

$$A(t+1) \text{ ist } \mathfrak{F}(t)\text{-messbar für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 4

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $H = \{H(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ vorhersagbar. Wir definieren das diskrete stochastische Integral $H \bullet X = \{H \bullet X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ von H bezüglich X durch

$$H \bullet X(t) \triangleq \sum_{s=1}^t H(s)[X(s) - X(s-1)] \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $H \bullet X$ ein Martingal ist, falls H beschränkt ist.
- (ii) Seien σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ und sei $F \in \mathfrak{F}(\sigma)$. Konstruieren Sie einen beschränkten vorhersagbaren Prozess $\bar{H} = \{\bar{H}(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, so dass

$$\bar{H} \bullet X(t) = \mathbb{1}_F[X(t \wedge \tau) - X(t \wedge \sigma)] \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

- (iii) Folgern Sie aus (i) und (ii), dass

$$E[X(\tau) | \mathfrak{F}(\sigma)] = X(\sigma) \text{ a.s.}$$