Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 18. Dezember, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1
Sei X ein Submartingal bezüglich einer Filtrierung $\mathfrak{F}$.

(i) Zeigen Sie, dass X ein Submartingal bezüglich der natürlichen Filtrierung $\mathfrak{F}^X$ ist.

(ii) Sei $\mathfrak{G}$ eine Filtrierung mit $\mathfrak{G}(t) \subset \mathfrak{F}(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Unter welchen Bedingungen an $\mathfrak{G}$ ist X ein Submartingal bezüglich $\mathfrak{G}$?

Aufgabe 2
Sei X ein Random Walk konstruiert durch eine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängig und identisch verteilten, reellwertigen, Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|Z_1|] < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Submartingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] \geq 0$.

(ii) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Supermartingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] \leq 0$.

(iii) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Martingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] = 0$.

Aufgabe 3
Sei X eine Brownsche Brücke und Y ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Zeigen Sie, dass X und Y keine Martingale sind.

Aufgabe 4
Seien W eine Brownsche Bewegung und $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Definiere die sogenannte geometrische Brownsche Bewegung $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{\lambda t + \sigma W(t)} \quad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

(i) Für fest gewähltes $t \in [0,\infty)$, bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $X(t)$.

(ii) Unter welchen Bedingungen an λ, σ ist X ein (Sub-/Super-)Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^W$?