Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Universität Trier
Wintersemester 2018/19

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 11. Dezember, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine vollständige Filtrierung und $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass jede Modifikation $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ von X dann ebenfalls $\mathfrak{F}$-adaptiert ist.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie zwei stochastische Prozesse X und Y, sodass Y zwar eine Modifikation von X ist, aber X und Y nicht ununterscheidbar sind.

Aufgabe 3

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine fraktionale Brownsche Bewegung mit Hurst Index $H \in (0,1)$ und sei $p \in (0, H)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast alle Pfade von X p-Hölderstetig sind.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst mit Hilfe des Kolmogorov-Čentsov Stetigkeitssatzes eine p-Hölderstetige Modifikation von X.

Aufgabe 4

Sei $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ der Hilbertraum aller (Äquivalenzklassen von) $\mathfrak{A}$-messbaren, reellwertigen Zufallsvariablen X mit $\mathrm{E}[|X|^2] < \infty$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle X, Y\rangle \triangleq \mathrm{E}\big[XY\big], \qquad X, Y \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}).$$

Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})} \big\|X - Y\big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})} \qquad \text{für alle } X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}).$$