Universität Trier

Bedingte Erwartungswerte

Stochastische Prozesse

Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ-Algebra $\mathfrak{F}$?

Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ-Algebra $\mathfrak{F}$?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben $\mathfrak{F}$, falls

(i) Y ist $\mathfrak{F}$-messbar,

(ii) es gilt $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$, und

(iii) es gilt $\mathrm{E}[\mathbb{1}_F X] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

In diesem Fall schreiben wir $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \triangleq Y$.

Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ-Algebra $\mathfrak{F}$?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben $\mathfrak{F}$, falls

(i) Y ist $\mathfrak{F}$-messbar,

(ii) es gilt $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$, und

(iii) es gilt $\mathrm{E}[\mathbb{1}_F X] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

In diesem Fall schreiben wir $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \triangleq Y$.

Man kann zeigen: Der bedingte Erwartungswert existiert und ist a.s. eindeutig.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y | \mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

L^1-Stetigkeit: $\mathrm{E}[X_n|\mathfrak{F}] \to \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \to X$ in L^1.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

L^1-Stetigkeit: $\mathrm{E}[X_n|\mathfrak{F}] \to \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \to X$ in L^1.

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...

Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen $\mathfrak{F}$ auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathrm{E}[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen $\mathfrak{F}$ auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathrm{E}[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Übungsaufgabe

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})} \|X - Y\|_{L^2}.$$