

Bedingte Erwartungswerte

Stochastische Prozesse



Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ -Algebra \mathfrak{F} ?



Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ -Algebra \mathfrak{F} ?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $E[|X|] < \infty$. Sei weiter \mathfrak{F} eine Teil- σ -Algebra von \mathfrak{A} . Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben \mathfrak{F} , falls

- (i) Y ist \mathfrak{F} -messbar,
- (ii) es gilt $E[|Y|] < \infty$, und
- (iii) es gilt $E[\mathbb{1}_F X] = E[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

In diesem Fall schreiben wir $E[X|\mathfrak{F}] \triangleq Y$.

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gegeben einer σ -Algebra \mathfrak{F} ?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $E[|X|] < \infty$. Sei weiter \mathfrak{F} eine Teil- σ -Algebra von \mathfrak{A} . Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben \mathfrak{F} , falls

- (i) Y ist \mathfrak{F} -messbar,
- (ii) es gilt $E[|Y|] < \infty$, und
- (iii) es gilt $E[\mathbb{1}_F X] = E[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

In diesem Fall schreiben wir $E[X|\mathfrak{F}] \triangleq Y$.

Man kann zeigen: Der bedingte Erwartungswert existiert und ist a.s. eindeutig.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}].$



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

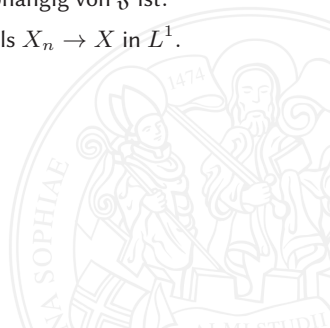
Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.

L^1 -Stetigkeit: $E[X_n|\mathfrak{F}] \rightarrow E[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \rightarrow X$ in L^1 .



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

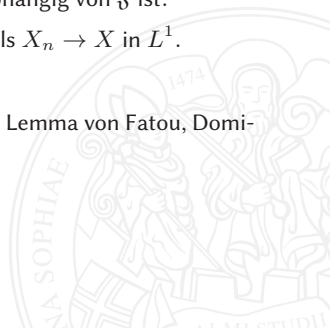
Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.

L^1 -Stetigkeit: $E[X_n|\mathfrak{F}] \rightarrow E[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \rightarrow X$ in L^1 .

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...



Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen \mathfrak{F} auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.



Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen \mathfrak{F} auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Übungsaufgabe

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$E[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})} \|X - Y\|_{L^2}.$$