Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Universität Trier
Wintersemester 2018/19

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 04. Dezember, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1

Sei W eine Brownsche Bewegung und $T > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big[\big\{\omega \in \Omega : \exists\, t_0, t_1 \in [0,T] \text{ mit } t_0 < t_1 \text{ und } W(s,\omega) \leq W(t,\omega)\, \forall\, t_0 \leq s \leq t \leq t_1\big\}\big] = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für fest gewählte $t_0, t_1 \in [0,T]$ mit $t_0 < t_1$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\big[\big\{\omega \in \Omega : W(s,\omega) \leq W(t,\omega)\, \forall\, t_0 \leq s \leq t \leq t_1\big\}\big] = 0.$$

Aufgabe 2

Sei $C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Bezeichne mit $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$ die Produkt-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Weiter sei für gegebenes $t \in [0,\infty)$ die Koordinatenprojektion auf t gegeben durch $\pi_{\{t\}} : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$, $\pi_{\{t\}}(f) = f(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass folgendes Mengensystem eine σ-Algebra ist:

$$\bigcup_{Q \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}} \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q)$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)} = \bigcup_{Q \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}} \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q).$$

(c) Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{R}) \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$, indem Sie für jede abzählbare Menge $Q \subset [0,\infty)$ zeigen, dass $C(\mathbb{R}) \notin \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q)$.

Aufgabe 3

(a) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Zeigen Sie, dass es keine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-trivialer (d.h. jedes Z_n ist fast sicher nicht konstant), unabhängiger Zufallsvariablen auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum gibt.

(b) Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-algebra auf $[0,1]$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Konstruieren Sie eine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass jedes Z_n Bernoulli-verteilt mit Parameter $1/2$ ist.

Aufgabe 4

Sei $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Modifikation von $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Angenommen X und Y sind entweder beide rechts- oder beide linksstetig. Zeigen Sie, dass X und Y ununterscheidbar sind.