Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Universität Trier
Wintersemester 2018/19

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 27. November, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable X heißt multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn Σ positiv semidefinit ist und die charakteristische Funktion $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathrm{E}\big[e^{i\langle y,X\rangle}\big] = e^{i\langle y,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle y,\Sigma y\rangle} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 1

Seien X eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass X genau dann multivariat normalverteilt mit Mittelwert μ und Kovarianz Σ ist, wenn

$$\langle y, X\rangle \sim \mathcal{N}\big(\langle y,\mu\rangle, \langle y,\Sigma y\rangle\big) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{E}[|X|^2] < \infty$ für jede multivariat normalverteilte Zufallsvariable X.

Aufgabe 2

Sei X multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[X] = \mu \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Cov}[X] = \Sigma.$$

Hinweis: Wie lassen sich die Momente einer Zufallsvariablen durch ihre charakteristische Funktion berechnen?

Aufgabe 3

Sei X eine n-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Schreibe $X = (X_1, X_2, X_3)$, wobei X_i für $i = 1,2,3$ ein $\mathbb{R}^{k_i}$-wertiger Zufallsvektor ist und $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Zerlege analog $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} & \Sigma_{1,3} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} & \Sigma_{2,3} \\ \Sigma_{3,1} & \Sigma_{3,2} & \Sigma_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \Sigma_{i,j} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_j} \text{ für } i,j = 1,2,3.$$

Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor (X_1, X_3) multivariat normalverteilt ist mit Mittelwert (μ_1, μ_3) und Kovarianz

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,3} \\ \Sigma_{3,1} & \Sigma_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt, indem Sie zwei (eindimensional) normalverteilte Zufallsvariablen X und Y angeben, so dass (X, Y) nicht zweidimensional normalverteilt ist.

$\longrightarrow$ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 4
Sei W eine Brownsche Bewegung und $t > 0$ beliebig aber fest gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $[t_0^n, t_1^n, \ldots, t_n^n] \subset [0, t]$ mit $t_0^n = 0$ und $t_n^n = t$ gegeben, und es gelte

$$\max_{k=1,\ldots,n} |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Sei weiter

$$X_n \triangleq \sum_{k=1}^n \big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big|^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass X_n in $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ gegen t konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\big[|X_n - t|^2\big] = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{E}[X_n] = t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$ für $n \to \infty$.