Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Universität Trier
Wintersemester 2018/19

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 20. November, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1
Seien W eine Brownsche Bewegung, $\alpha > 0$ und $t_0 \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Prozesse

$$\{-W(t)\}_{t\in[0,\infty)}, \qquad \{\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}W(\alpha t)\}_{t\in[0,\infty)} \qquad \text{und} \qquad \{W(t_0+t)-W(t_0)\}_{t\in[0,\infty)}$$

ebenfalls Brownsche Bewegungen sind.

Aufgabe 2
Sei W eine Brownsche Bewegung und X die zugehörige Brownsche Brücke. Zeigen Sie, dass X ein stetiger, zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion

$$\Gamma : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(s,t) \triangleq s\wedge t - st$$

ist. Zeigen Sie außerdem, dass X nicht $\mathfrak{F}^W$-adaptiert ist.

Aufgabe 3
Seien $\kappa, \sigma > 0$ und W eine Brownsche Bewegung. Definiere $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{-\kappa t} W\big(\tfrac{\sigma^2}{2\kappa}(e^{2\kappa t}-1)\big) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist.

Aufgabe 4

(i) Für $q \in (0,1]$ sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) \triangleq x^q$. Für welche $p \in (0,1]$ ist diese Funktion p-Hölderstetig? Für welche $p \in (0,1]$ ist die Funktion p-Hölderstetig in jedem Punkt $x \in [0,1]$?

(ii) Seien $p \in (0,1]$, $a \in (0,1)$ und $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \triangleq \begin{cases} -1/\log(x) & \text{falls } x \in (0,a], \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zwar gleichmäßig stetig, aber nicht p-Hölderstetig ist.