Dr. Christoph Belak
Jonas Jakobs

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 13. November, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen. Wir betrachten einen White Noise Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$X(t) \triangleq Z_t \text{ für alle } t \in \mathbb{N}.$$

Weiter sei $B \in \mathfrak{S}$. Bestimmen Sie die Verteilung der Treffzeit τ_B von B durch X und zeigen Sie, dass $\tau_B < \infty$ fast sicher genau dann gilt, wenn $\mathbb{P}[Z_1 \in B] > 0$.

Aufgabe 2
Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}([0,1])$ und $\mathbb{P}$ das Lebesguemaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Sei A eine nicht messbare Teilmenge von Ω und $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein stochastischer Prozess mit

$$X(t,\omega) \triangleq \begin{cases} t+\omega & \text{falls } t \in A, \\ -t-\omega & \text{falls } t \notin A, \end{cases} \qquad \text{für alle } (t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(X(t)) = \mathfrak{A}$ und folgern Sie, dass die natürliche Filtrierung $\mathfrak{F}^X$ von X durch $\mathfrak{F}^X(t) = \mathfrak{A}$ für alle $t \in [0,\infty)$ gegeben ist. Definiere $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ durch

$$\tau \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : 2t \geq |X(t)|\big\}.$$

Zeigen Sie, dass τ eine $\mathfrak{F}^X$-Stoppzeit ist, dass $\mathfrak{F}^X(\tau) = \mathfrak{A}$, aber dass $\{X(\tau) > 0\} \notin \mathfrak{F}^X(\tau)$, also $X(\tau)$ nicht $\mathfrak{F}^X(\tau)$-messbar ist.

Aufgabe 3
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Filtrierung und $\mathfrak{F}(\infty) \triangleq \sigma(\mathfrak{F}(t) : t \in [0,\infty))$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ heißt optionale Zeit wenn

$$\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie, dass τ genau dann eine optionale Zeit ist, wenn τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F}^+ = \{\mathfrak{F}^+(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist, wobei

$$\mathfrak{F}^+(t) \triangleq \mathfrak{F}(t+) \triangleq \textstyle\bigcap_{s>t} \mathfrak{F}(s) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Aufgabe 4
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Filtrierung und $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten. Definiere $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ und $\sigma : \Omega \to [0,\infty]$ durch

$$\tau(\omega) \triangleq \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n(\omega) \qquad \text{und} \qquad \sigma(\omega) \triangleq \inf_{n\in\mathbb{N}} \tau_n(\omega) \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass τ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit ist und dass σ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit ist, falls $\mathfrak{F}$ rechtsstetig ist.
Hinweis: Um zu zeigen, dass σ eine Stoppzeit ist, kann Aufgabe 3 hilfreich sein.