

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

Abgabe: Dienstag, 06. November, 16:15 Uhr, Postkasten E14 oder direkt in der Übung.

Aufgabe 1

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Filtrierung. Zeigen Sie, dass X genau dann \mathfrak{F} -adaptiert ist, wenn

$$\mathfrak{F}^X(t) \subseteq \mathfrak{F}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Aufgabe 2

Sei $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Filtrierung. Zeigen Sie, dass τ genau dann eine \mathfrak{F} -Stopzeit ist, wenn der Indikatorprozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ mit

$$X(t) \triangleq \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}$$

ein \mathfrak{F} -adaptierter stochastischer Prozess ist.

Aufgabe 3

Sei $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ eine Stopzeit bezüglich einer Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{F}(\tau)$ eine Teil- σ -Algebra von \mathfrak{A} ist. Zeigen Sie außerdem, dass wenn $\tau(\omega) = t$ für alle $\omega \in \Omega$ für ein festes $t \in \mathcal{T}$, dass dann $\mathfrak{F}(\tau) = \mathfrak{F}(t)$.

Aufgabe 4

Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ eine Filtrierung und $X = \{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ ein reellwertiger, \mathfrak{F} -adaptierter, rechtsstetiger, wachsender stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass die Treffzeit $\tau_{[a, \infty)}$ von $[a, \infty)$ durch X für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine \mathfrak{F} -Stopzeit ist.