Stochastische Analysis und Mathematical Finance
Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 04. Juli, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1
Es seien B^1 und B^2 eindimensionale Brownsche Bewegungen mit

$$\mathrm{d}B^1(t)\,\mathrm{d}B^2(t) = \rho(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in [0,T],$$

für einen $(-1,1)$-wertigen, vorhersagbaren Prozess ρ. Definiere $W = (W^1, W^2)$ durch

$$W^1 \triangleq B^1 \quad \text{und} \quad W^2 \triangleq -\tfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \bullet B^1 + \tfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \bullet B^2.$$

Zeigen Sie, dass W eine zweidimensionale Brownsche Bewegung ist.

Aufgabe 2
Sei $S = (S^0, S^1)$ ein Finanzmarkt mit $S^0(t) = 1$ für alle $t \in [0,T]$ und

$$\mathrm{d}S^1(t) = 2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W^1(t) + 2\,\mathrm{d}W^2(t), \qquad t \in [0,T], \qquad S^1(0) = 1,$$

wobei $W = (W^1, W^2)$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung ist. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele äquivalente Martingalmaße gibt.

Aufgabe 3
Sei W eine n-dimensionale Brownsche Bewegung und $f \in \mathrm{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Angenommen der Prozess M gegeben durch

$$M(t) \triangleq f(t, W(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]$$

ist ein lokales Martingal mit Darstellung

$$M(t) = M(0) + H \bullet W(t) = M(0) + \textstyle\sum_{i=1}^n H_i \bullet W^i(t), \qquad t \in [0,T],$$

für einen W-integrierbaren stochastischen Prozess $H = (H_1, \dots, H_n)$. Bestimmen Sie H.

Aufgabe 4
Sei $W = (W^1, \dots, W^n)$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung und sei, für alle $i = 1, \dots, n$, ein Prozess X^i gegeben durch

$$\mathrm{d}X^i(t) = -\kappa X^i(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W^i(t), \qquad t \in [0,T],$$

wobei $\kappa, \sigma > 0$. Definiere einen Prozess Y durch

$$Y(t) \triangleq \textstyle\sum_{i=1}^n X^i(t)^2, \qquad t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass Y folgende *Cox-Ingersoll-Ross* Dynamik besitzt:

$$\mathrm{d}Y(t) = -\alpha[Y(t) - \beta]\,\mathrm{d}t + \gamma\sqrt{Y(t)}\,\mathrm{d}B(t),$$

wobei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist und $\alpha, \beta, \gamma > 0$.