# Stochastische Analysis und Mathematical Finance

## Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 13. Juni, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

**Aufgabe 1**
Sei $W$ eine Brownsche Bewegung und $\mu_k(t) \triangleq \mathbb{E}[W(t)^k]$ für alle $t \in [0, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Itō Formel, dass

$$\mu_k(t) = \tfrac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \mu_{k-2}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad k \geq 2.$$

Berechnen Sie damit $\mathbb{E}[W(t)^4]$.

**Aufgabe 2**
Sei $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und $W$ eine Brownsche Bewegung.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T f'(s)W(s)\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big] = f(T)^2 T - 2f(T)\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T f(s)^2\,\mathrm{d}s.$$

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[(\int_0^T W(s)\,\mathrm{d}s)^2]$.

**Aufgabe 3**
Sei $W$ eine Brownsche Bewegung und $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Weiter sei $H : [0, T] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $H(t) \triangleq e^{\beta t}$, $t \in [0, T]$. Definiere einen Prozess $X$ durch

$$X(t) \triangleq e^{-\beta t}x + \tfrac{\alpha}{\beta}\big(1 - e^{-\beta t}\big) + \sigma e^{-\beta t}(H \bullet W)(t), \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass $X$ die folgende Ornstein-Uhlenbeck Gleichung löst:

$$\mathrm{d}X(t) = [\alpha - \beta X(t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x.$$

**Aufgabe 4**
Sei $W$ eine $d$-dimensionale Brownsche Bewegung und $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ harmonisch, d.h.

$$\Delta f(x) \triangleq \sum_{i=1}^d \partial_{ii}^2 f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass $f(W)$ ein lokales Martingal ist.