

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 06. Juni, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die vorhersagbare σ -Algebra \mathcal{L} durch die stochastischen Intervalle

$$(\sigma, \tau] \triangleq \{(t, \omega) \in (0, T] \times \Omega : \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}, \quad \sigma, \tau \text{ Stoppzeiten mit } \sigma \leq \tau,$$

erzeugt wird.

Aufgabe 2

Seien X und Y stetige, adaptierte Prozesse und $\pi = [t_0, \dots, t_n]$ eine Partition. Definiere einen Prozess $\langle X, Y \rangle_\pi$ durch

$$\langle X, Y \rangle_\pi(t) \triangleq \sum_{k=1}^n dX(t_{k-1}, t \wedge t_k) dY(t_{k-1}, t \wedge t_k) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass wenn X von endlicher Variation ist, dass dann

$$\sup_{t \in [0, T]} |\langle X, Y \rangle_\pi(t)| \rightarrow 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit für } |\pi| \downarrow 0.$$

Aufgabe 3

(i) Sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Z_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|Z_n - Z\|_{L^2(\mathbb{P})} \rightarrow 0 \text{ für eine Zufallsvariable } Z.$$

Zeigen Sie, dass $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in [0, \infty)$ und bestimmen Sie μ und σ^2 .

Hinweis: Benutzen Sie charakteristische Funktionen.

(ii) Sei W eine \mathbb{R} -wertige Brownsche Bewegung und $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar mit $\int_0^T \sigma(t)^2 dt < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sigma \bullet W(T) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ für gewisse $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_0^2 \in [0, \infty)$. Bestimmen Sie μ_0 und σ_0^2 .

Hinweis: Benutzen Sie Teil (i) dieser Aufgabe und Theorem 27.

Aufgabe 4

Sei M ein stetiges L^2 -Martingal und A ein stetiger Prozess von endlicher Variation. Sei weiter $\alpha > 0$ und $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge vorhersagbarer Prozesse mit

$$H_n(t, \omega) \rightarrow H(t, \omega) \quad \text{und} \quad |H_n(t, \omega)| \leq \alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[|H_n \bullet A(t) - H \bullet A(t)| + |H_n \bullet M(t) - H \bullet M(t)| \right] \rightarrow 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$.