Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 30. Mai, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Seien A und B stetige, adaptierte Prozesse von endlicher Variation mit $A(0) = B(0) = 0$. Beweisen Sie die folgende partielle Integrationsregel:

$$A(t)B(t) = A \bullet B(t) + B \bullet A(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, wenn A und B monoton wachsend sind.

Aufgabe 2

Sei M ein lokales Martingal mit $M(0) = 0$ und $\langle M\rangle(T) = 0$. Zeigen Sie, dass $M(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$.

Aufgabe 3

Sei $M = \{M(t)\}_{t=0,\ldots,T}$ ein zeitdiskretes lokales Martingal mit

$$\mathbb{E}[M(t)^-] < \infty \qquad \text{für alle } t \in \{0, \ldots, T\}.$$

Zeigen Sie, dass M ein echtes Martingal ist.

Aufgabe 4

Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und

$$\tau \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : W(t) = 1\big\}.$$

Sei $B = W(\cdot \wedge \tau)$ und definiere einen Prozess $M = \{M(t)\}_{t\in[0,1]}$ durch

$$M(t) \triangleq \begin{cases} B(t/(1-t)) & \text{falls } t \in [0, 1), \\ 1 & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass M ein lokales Martingal aber kein echtes Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^M$ ist.