Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 09. Mai, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

Definition 1 (Cox-Ross-Rubinstein Modell / Binomialmodell)
Seien $-1 < d < u$, $r \in \mathbb{R}$, $s > 0$ und $p \in (0,1)$. Das *Cox-Ross-Rubinstein Modell* bzw. *Binomialmodell* ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$\begin{aligned} S^0(0) &= 1 \quad \text{und} \quad S^0(t) = S^0(t-1)(1+r) = (1+r)^t & t = 1, \dots, T, \\ S^1(0) &= s \quad \text{und} \quad S^1(t) = S^1(t-1)(1+R_t) = s\prod_{u=1}^{t}(1+R_u) & t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

wobei $\{R_t\}_{t=1,\dots,T}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind und

$$\mathbb{P}[R_1 = u] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[R_1 = d] = 1 - p.$$

Aufgabe 1
Sei S ein Cox-Ross-Rubinstein Modell und $\mathfrak{F}$ die natürliche Filtrierung von S. Zeigen Sie, dass S genau dann frei von Arbitragemöglichkeiten ist, wenn $d < r < u$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall alle äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 2
Sei $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ die Auszahlungsfunktion einer Option auf S^1 im Cox-Ross-Rubinstein Modell $S = (S^0, S^1)$ mit $d < r < u$.

(i) Sei $T = 1$. Bestimmen Sie eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ, so dass

$$X^\varphi(T) = g(S^1(T)).$$

Eine solche Strategie nennen wir Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$.

(ii) Sei $T = 2$. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$ für den Spezialfall

$$g(s) \triangleq \max\{s - K, 0\}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

unter der Annahme $K = s(1+d)(1+u)$.

⟶ Zweite Seite nicht vergessen!

Definition 2 (Trinomialmodell)
Das *Trinomialmodell* ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$\begin{aligned} &S^0(0) = 1 \quad \text{und} \quad S^0(t) = S^0(t-1)(1+r) = (1+r)^t \qquad t = 1, \ldots, T, \\ &S^1(0) = s \quad \text{und} \quad S^1(t) = S^1(t-1)(1+R_t) = s \prod_{u=1}^{t}(1+R_u) \qquad t = 1, \ldots, T, \end{aligned}$$

wobei $s > 0$ und $\{R_t\}_{t=1,\ldots,T}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}[R_1 = d] = 1 - p - p', \qquad \mathbb{P}[R_1 = r] = p', \qquad \mathbb{P}[R_1 = u] = p$$

für $p, p' > 0$ mit $p + p' < 1$ und $-1 < d < r < u$.

Aufgabe 3
Sei S ein Trinomialmodell und $\mathfrak{F}$ die natürliche Filtrierung von S. Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 4
Wir betrachten das Trinomialmodell $S = (S^0, S^1)$ mit $T = 1$. Für $s(1+d) < K < s(1+u)$ seien

$$C(T) \triangleq \max\{K - S^1(1), 0\} \qquad \text{und} \qquad F(T) \triangleq S^1(1) - K.$$

Gibt es Replikationsstrategien für $C(T)$ bzw. $F(T)$?