Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 02. Mai, 13:45 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

(a) Zeichnen Sie Auszahlungsdiagramme zu folgenden Strategien. Wie muss sich der Markt entwickeln, damit der Investor einen Gewinn erzielt?

(i) *Bearish Spread*: Kaufe einen europäischen Call mit Strike K_1 und verkaufe einen weiteren europäischen Call mit derselben Maturity und Strike $K_2 < K_1$.

(ii) *Strangle*: Kaufe einen europäischen Put mit Strike K_1 und kaufe einen europäischen Call mit derselben Maturity und Strike $K_2 > K_1$.

(b) Stellen Sie ein Portfolio aus europäischen Calls und Puts mit Maturity T und Underlying S zusammen, um ein Auszahlungsprofil zu erhalten, so dass...

(i) ... Sie einen Gewinn machen, falls sich der Preis $S(T)$ des Underlyings zum Zeitpunkt T im Vergleich zum heutigen Preis $S(t)$ nicht signifikant ändert.

(ii) ... Ihr Gewinn zunächst (als Funktion von $S(T)$) linear wächst, falls $S(T)$ größer als der heutige Preis $S(t)$ ist, und Ihr Gewinn konstant ist, falls $S(T)$ deutlich größer als der heutige Preis $S(t)$ ist.

Aufgabe 2

Ein binärer Call (bzw. Put) zahlt einen festen Betrag $\alpha > 0$ zum Zeitpunkt T, falls $S(T) \geq K$ (bzw. $S(T) < K$) für den Strike $K > 0$ gilt. Leiten Sie eine Put-Call Parität für binäre Calls und Puts her.

Aufgabe 3

Angenommen, Sie erhalten die folgenden Preisangaben:

$$C(t) = 11.42, \quad P(t) = 3.94, \quad P^a(t) = 5.67, \quad p(t,T) \triangleq e^{-0.02}, \quad S(t) = 67.13.$$

Existiert eine Arbitragemöglichkeit? Falls ja, wie sieht die Arbitragemöglichkeit aus?

Aufgabe 4

Sei $p(t,T) \leq 1$ für alle $T > 0$ und $t \leq T$. Beweisen Sie die folgenden Preisschranken.

(i) Sei C_1 ein europäischer Call mit Maturity T und Strike K_1 und sei C_2 ein europäischer Call mit Maturity T und Strike $K_2 > K_1$. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq \big(K_2 - K_1\big)p(t,T) \qquad \text{für alle } t \leq T.$$

(ii) Sei C_1 ein europäischer Call mit Maturity T_1 und Strike K und sei C_2 ein europäischer Call mit Maturity $T_2 > T_1$ und Strike K. Zeigen Sie, dass

$$C_1(t) \leq C_2(t) \qquad \text{für alle } t \leq T_1.$$