Stochastische Prozesse
Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 01. Februar, 13:45 Uhr.

Im Folgenden seien W eine eindimensionale Brownsche Bewegung, $a < 0 < b$ und

$$\tau_a \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : W(t) \leq a\big\} \qquad \text{und} \qquad \tau_b \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : W(t) \geq b\big\}.$$

Die Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ wird als vollständig angenommen.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\big[e^{-y\tau_b}\big] = e^{-b\sqrt{2y}} \qquad \text{für alle } y \in [0,\infty)$$

und $\tau_b < \infty$ fast sicher.
Hinweis: Auf Übungsblatt 8 haben wir gezeigt, dass der Prozess $\{e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t+\theta W(t)}\}_{t\in[0,\infty)}$ für jede Wahl von $\theta \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\tau_a \leq \tau_b] = \tfrac{b}{b-a} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[\tau_a > \tau_b] = \tfrac{-a}{b-a}.$$

Aufgabe 3
Definiere $T_b \triangleq \tau_b \mathbb{1}_{\{\tau_b<\infty\}}$ und $\bar{W} = \{\bar{W}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$\bar{W}(t) \triangleq W(t)\mathbb{1}_{\{t<T_b\}} + \big[2W(T_b) - W(t)\big]\mathbb{1}_{\{t\geq T_b\}} \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass $\bar{W}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich ihrer natürlichen Filtrierung ist.

Aufgabe 4
Definiere $M = \{M(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$M(t) \triangleq \sup_{s\in[0,t]} W(s) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big[M(t) \geq b, W(t) \leq b-y\big] = \mathbb{P}\big[W(t) \geq b+y\big] \qquad \text{für alle } b > 0 \text{ und } y,t \geq 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.