Stochastische Prozesse

Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 25. Januar, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei τ eine Stoppzeit bezüglich einer vollständigen Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$. Sei außerdem $\sigma : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ eine Zufallsvariable mit $\tau = \sigma$ fast sicher. Zeigen Sie, dass σ eine Stoppzeit ist.

Aufgabe 2
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilter Zufallsvariablen und definiere

$$S_n \triangleq \sum_{k=1}^n Z_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Verteilung von $(S_1, \ldots, S_n)$ die folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ besitzt:

$$f(t_1, \ldots, t_n) \triangleq \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_n\}}, \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transformationssatz für Dichten.

Aufgabe 3
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilter Zufallsvariablen und $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ der zugehörige Erneuerungsprozess, d.h.

$$N(t) \triangleq \sup\big\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^n Z_k \le t\big\} \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $s, t \in [0, \infty)$ mit $s \le t$ und alle $j, k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\big[N(s) = j, N(t) - N(s) = k\big] = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{\lambda!} e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}.$$

Folgern Sie, dass $N(t) - N(s)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t - s)$ und unabhängig von $N(s)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Lévy Prozesse und $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$X \triangleq \sum_{k=1}^n z_k X_k$$

ein Lévy Prozess ist.