Stochastische Prozesse

Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, 18. Januar, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1 (Lévy's Downward Theorem)
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{T}$ abzählbar. Sei weiter Z eine Zufallsvariable mit $\mathrm{E}[|Z|] < \infty$. Falls $\inf \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\big[Z\big|\mathfrak{F}(t)\big] \to \mathrm{E}\big[Z\big|\mathfrak{F}(\inf \mathcal{T})\big] \text{ a.s. und im Mittel für } t \downarrow \inf \mathcal{T}.$$

Aufgabe 2 (Lévy's Upward Theorem)
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{T}$ abzählbar. Sei weiter Z eine Zufallsvariable mit $\mathrm{E}[|Z|] < \infty$. Falls $\sup \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\big[Z\big|\mathfrak{F}(t)\big] \to \mathrm{E}\big[Z\big|\mathfrak{F}(\sup \mathcal{T})\big] \text{ a.s. und im Mittel für } t \uparrow \sup \mathcal{T}.$$

Aufgabe 3 (Kolmogorov's 0/1 Gesetz)
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen und

$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\big(X_k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\big).$$

Zeigen Sie, dass für alle $\mathfrak{T}(\infty)$-messbaren Zufallsvariablen Z gilt

$$Z = \mathrm{E}[Z] \text{ fast sicher.}$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$, definieren Sie $\mathfrak{F}(n) \triangleq \sigma(X_k : k = 1, \ldots, n)$ und wenden Sie Aufgabe 2 auf $\{\mathrm{E}[Z|\mathfrak{F}(n)]\}_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 4
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$ sowie $S = \{S(t)\}_{t\in-\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in-\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$S(t) \triangleq \sum_{k=1}^{-t} X_k \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{F}(t) \triangleq \sigma\big(S(r) : r \in -\mathbb{N}, r \leq t\big) \qquad \text{für alle } t \in -\mathbb{N}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $t \in -\mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{E}\big[X_1\big|\mathfrak{F}(t)\big] = \ldots = \mathrm{E}\big[X_{-t}\big|\mathfrak{F}(t)\big] = \tfrac{1}{-t} S(t) \text{ fast sicher.}$$

Folgern Sie aus Aufgabe 1, dass

$$\tfrac{1}{-t} S(t) \to \mathrm{E}\big[X_1\big|\mathfrak{F}(-\infty)\big] \text{ a.s. und im Mittel für } t \downarrow -\infty.$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass $\mathrm{E}[X_1|\mathfrak{F}(-\infty)] = \mathrm{E}[X_1]$ fast sicher. Folgern Sie hieraus das starke Gesetz der großen Zahlen:

$$\tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathrm{E}[X_1] \text{ a.s. und im Mittel.}$$