Stochastische Prozesse

Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 11. Januar, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1

Sei W eine Brownsche Bewegung und definiere $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq W(t)^2 - t \qquad \text{und} \qquad Y(t) \triangleq W(t)^3 - 3tW(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass X und Y Martingale sind.

Aufgabe 2

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ stetig und reellwertig. Angenommen, es existiert eine Folge $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit

$$\tau_n \uparrow \infty \qquad \text{und} \qquad X(\cdot \wedge \tau_n) \text{ ist ein Martingal für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann nennen wir X ein lokales Martingal.

(i) Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist, falls $\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|] < \infty$ für alle $T > 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass X ein Supermartingal ist, falls X nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 3

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert mit $\mathrm{E}[|X(t)|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass X eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit) darstellbar ist als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \text{ a.s.} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $M = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist, $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein vorhersagbar Prozess ist und $M(0) = A(0) = 0$ fast sicher. Zeigen Sie außerdem, dass X genau dann ein Submartingal ist, wenn A a.s. wachsend ist.

Hinweis: Ein Prozess $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ heißt vorhersagbar, wenn gilt

$$A(t+1) \text{ ist } \mathfrak{F}(t)\text{-messbar für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 4

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $H = \{H(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar. Wir definieren das diskrete stochastische Integral $H \bullet X = \{H \bullet X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ von H bezüglich X durch

$$H \bullet X(t) \triangleq \textstyle\sum_{s=1}^{t} H(s)\big[X(s) - X(s-1)\big] \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $H \bullet X$ ein Martingal ist, falls H beschränkt ist.

(ii) Seien σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \le \tau$ und sei $F \in \mathfrak{F}(\sigma)$. Konstruieren Sie einen beschränkten vorhersagbaren Prozess $\bar{H} = \{\bar{H}(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$, so dass

$$\bar{H} \bullet X(t) = \mathbb{1}_F\big[X(t\wedge\tau) - X(t\wedge\sigma)\big] \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii), dass

$$\mathrm{E}\big[X(\tau)\big|\mathfrak{F}(\sigma)\big] = X(\sigma) \text{ a.s.}$$