Stochastische Prozesse

Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, 14. Dezember, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Seien W eine Brownsche Bewegung und $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Definiere die sogenannte geometrische Brownsche Bewegung $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{\lambda t + \sigma W(t)} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

(i) Für fest gewähltes $t \in [0, \infty)$, bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $X(t)$.

(ii) Unter welchen Bedingungen an λ, σ ist X ein (Sub-/Super-)Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^W$?

Aufgabe 2
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein Submartingal und seien σ und τ Stoppzeiten mit endlichem Wertebereich $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass

$$X(\sigma \wedge \tau) \leq \mathrm{E}[X(\tau)|\mathfrak{F}(\sigma)] \text{ a.s.}$$

Aufgabe 3
Sei $\Omega \triangleq [0, 1]$, $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-Algebra auf $[0, 1]$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue Maß auf $[0, 1]$. Definiere einen Prozess $X = \{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$X(n, \omega) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } \omega \in [0, 2^{-n}] \\ 0 & \text{falls } \omega \in (2^{-n}, 1] \end{cases} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass X ein Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^X$ ist, dass aber $\mathrm{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X(n)] = \infty$.

Aufgabe 4
Sei $\mathcal{T} \triangleq [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f monoton wachsend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass f genau dann von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Wählen Sie $f_1 \triangleq V_f$ und $f_2 \triangleq V_f - f$.