Die Multivariate Normalverteilung

Stochastische Prozesse

Die eindimensionale Normalverteilung

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \geq 0$, wenn X die Dichte

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

besitzt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ nennen wir X **standardnormalverteilt**.

Die eindimensionale Normalverteilung

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \geq 0$, wenn X die Dichte

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

besitzt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ nennen wir X **standardnormalverteilt**.

Die **charakteristische Funktion** der eindimensionalen Normalverteilung ist

$$\varphi_X(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_X(y) = \mathrm{E}\left[e^{iyX}\right] = e^{i\mu y - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2}.$$

Die multivariate Normalverteilung

Definition (Multivariate Normalverteilung)

Einen n-dimensionalen Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ nennen wir **multivariat normalverteilt**, wenn ein Vektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ und eine positiv semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren, so dass X folgende charakteristische Funktion besitzt:

$$\varphi_X(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_X(y) = \mathrm{E}\left[e^{i\langle y, X\rangle}\right] = e^{i\langle \mu, y\rangle - \frac{1}{2}\langle y, \Sigma y\rangle}.$$

Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ und nennen μ den **Mittelwertvektor** und Σ die **Kovarianzmatrix** von X.

Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung

Die multivariate Normalverteilung besitzt folgende **Eigenschaften**:

- Ist Σ invertierbar, so besitzt X die **Dichtefunktion**

$$f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1} (x-\mu)}.$$

Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung

Die multivariate Normalverteilung besitzt folgende **Eigenschaften**:

- Ist Σ invertierbar, so besitzt X die **Dichtefunktion**

$$f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

- **Affine Transformationen** sind wieder multivariat normalverteilt: Sind $a \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $d \leq n$, so gilt

$$Y \triangleq a + BX \sim \mathcal{N}(a + B\mu, B\Sigma B^\top).$$

Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung

Die multivariate Normalverteilung besitzt folgende **Eigenschaften**:

- Ist Σ invertierbar, so besitzt X die **Dichtefunktion**

$$f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

- **Affine Transformationen** sind wieder multivariat normalverteilt: Sind $a \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$, $d \leq n$, so gilt

$$Y \triangleq a + BX \sim \mathcal{N}(a + B\mu, B\Sigma B^\top).$$

- Sei $X = (X_1, X_2)$ mit $X_1 \in \mathbb{R}^d$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$ eine Partition von X. Dann sind X_1 und X_2 wieder multivariat normalverteilt. Die **Randverteilungen** sind also multivariat normal.

Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung

Die multivariate Normalverteilung besitzt folgende **Eigenschaften**:

- Ist Σ invertierbar, so besitzt X die **Dichtefunktion**

$$f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_X(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

- **Affine Transformationen** sind wieder multivariat normalverteilt: Sind $a \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$, $d \leq n$, so gilt

$$Y \triangleq a + BX \sim \mathcal{N}(a + B\mu, B\Sigma B^\top).$$

- Sei $X = (X_1, X_2)$ mit $X_1 \in \mathbb{R}^d$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$ eine Partition von X. Dann sind X_1 und X_2 wieder multivariat normalverteilt. Die **Randverteilungen** sind also multivariat normal.
- Die **Umkehrung gilt nicht**: Sind X_1 und X_2 multivariat normalverteilt, so ist (X_1, X_2) im Allgemeinen nicht multivariat normalverteilt.

Charakterisierung der multivariaten Normalverteilung

Charakterisierung der multivariaten Normalverteilung

Ein n-dimensionaler Zufallsvektor X ist genau dann multivariat normalverteilt mit Mittelwertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ, wenn

$$\langle y, X\rangle \sim \mathcal{N}\big(\langle y, \mu\rangle, \langle y, \Sigma y\rangle\big) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$