Stochastische Prozesse

Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 07. Dezember, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ der Hilbertraum aller (Äquivalenzklassen von) $\mathfrak{A}$-messbaren, reellwertigen Zufallsvariablen X mit $\mathrm{E}[|X|^2] < \infty$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathrm{E}\big[XY\big], \qquad X, Y \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}).$$

Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})} \big\|X - Y\big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})} \qquad \text{für alle } X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}).$$

Aufgabe 2
Sei X ein Submartingal bezüglich einer Filtrierung $\mathfrak{F}$.

(i) Zeigen Sie, dass X ein Submartingal bezüglich der natürlichen Filtrierung $\mathfrak{F}^X$ ist.

(ii) Sei $\mathfrak{G}$ eine Filtrierung mit $\mathfrak{G}(t) \subset \mathfrak{F}(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Unter welchen Bedingungen an $\mathfrak{G}$ ist X ein Submartingal bezüglich $\mathfrak{G}$?

Aufgabe 3
Sei X ein Random Walk konstruiert durch eine Folge $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von unabhängig und identisch verteilten, reellwertigen Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|Z_1|] < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Submartingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] \geq 0$.

(ii) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Supermartingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] \leq 0$.

(iii) X ist genau dann ein $\mathfrak{F}^X$-Martingal, wenn $\mathrm{E}[Z_1] = 0$.

Aufgabe 4
Sei X eine Brownsche Brücke und Y ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Zeigen Sie, dass X und Y keine Martingale sind.