Stochastische Prozesse
Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, 30. November, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine vollständige Filtrierung und $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass jede Modifikation $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ von X dann ebenfalls $\mathfrak{F}$-adaptiert ist.

Aufgabe 2
Konstruieren Sie zwei stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ und $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$, sodass Y zwar eine Modifikation von X ist, aber X und Y nicht ununterscheidbar sind.

Aufgabe 3
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine fraktionale Brownsche Bewegung mit Hurst Index $H \in (0,1)$ und sei $p \in (0,H)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast alle Pfade von X p-Hölderstetig sind.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst mit Hilfe des Kolmogorov-Čentsov Stetigkeitssatzes eine p-Hölderstetige Modifikation von X.

Aufgabe 4
Sei W eine Brownsche Bewegung und $t > 0$ beliebig aber fest gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $[t_0^n, t_1^n, \ldots, t_n^n] \subset [0,t]$ mit $t_0^n = 0$ und $t_n^n = t$ gegeben, und es gelte $\max_{k=1,\ldots,n} |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0$ für $n \to \infty$. Sei weiter

$$X_n \triangleq \sum_{k=1}^n \big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big|^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass X_n in $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ gegen t konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\big[|X_n - t|^2\big] = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{E}[X_n] = t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$ für $n \to \infty$.