Stochastische Prozesse

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 23. November, 13:45 Uhr.

Eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable X heißt multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn Σ positiv semidefinit ist und die charakteristische Funktion $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathrm{E}\big[e^{i\langle y,X\rangle}\big] = e^{i\langle y,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle y,\Sigma y\rangle} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 1

Seien X eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass X genau dann multivariat normalverteilt mit Mittelwert μ und Kovarianz Σ ist, wenn

$$\langle y, X\rangle \sim \mathcal{N}\big(\langle y,\mu\rangle, \langle y,\Sigma y\rangle\big) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{E}[|X|^2] < \infty$ für jede multivariat normalverteilte Zufallsvariable X.

Aufgabe 2

Sei X multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[X] = \mu \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Cov}[X] = \Sigma.$$

Aufgabe 3

Sei X eine n-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Schreibe $X = (X_1, X_2, X_3)$, wobei X_i für $i = 1,2,3$ ein $\mathbb{R}^{k_i}$-wertiger Zufallsvektor ist und $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Zerlege analog $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} & \Sigma_{1,3} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} & \Sigma_{2,3} \\ \Sigma_{3,1} & \Sigma_{3,2} & \Sigma_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \Sigma_{i,j} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_j} \text{ für } i,j = 1,2,3.$$

Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor (X_1, X_3) multivariat normalverteilt ist mit Mittelwert (μ_1, μ_3) und Kovarianz

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,3} \\ \Sigma_{3,1} & \Sigma_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt, indem Sie zwei (eindimensional) normalverteilte Zufallsvariablen X und Y angeben, so dass (X, Y) nicht zweidimensional normalverteilt ist.

Aufgabe 4

Sei $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Modifikation von $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Seien weiter X und Y entweder beide rechts- oder beide linksstetig. Zeigen Sie, dass X und Y ununterscheidbar sind.