Stochastische Prozesse
Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 16. November, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\}$, die Menge aller Funktionen von $\mathcal{T}$ nach $\mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann, dass für jedes $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathcal{T}$ auch der zum Zeitpunkt t gestoppte Pfad $\omega(\cdot \wedge t)$ in Ω liegt. Weiter sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ der kanonische Prozess gegeben durch

$$X(t, \omega) \triangleq \omega(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } \omega \in \Omega.$$

Sei $\mathfrak{F}^X = \{\mathfrak{F}^X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ die natürliche Filtrierung von X und setze $\mathfrak{F}^X(\infty) \triangleq \sigma(X(t) : t \in \mathcal{T})$ falls $\infty \notin \mathcal{T}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Seien $F \subset \Omega$ und $t \in \mathcal{T}$. Dann gilt $F \in \mathfrak{F}^X(t)$ genau dann, wenn $F \in \mathfrak{F}^X(\infty)$ und für alle $\omega, \bar{\omega} \in \Omega$ gilt:

$$\Big[\omega \in F \text{ und } X(s, \omega) = X(s, \bar{\omega}) \text{ für alle } s \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t\Big] \text{ impliziert } \bar{\omega} \in F.$$

Hinweis: Für die $\Leftarrow$ Richtung, zeigen Sie, dass

$$a_t : \Omega \to \Omega, \qquad a_t(\omega) \triangleq \omega(\cdot \wedge t)$$

eine $\mathfrak{F}^X(t)$-$\mathfrak{F}^X(\infty)$-messbare Abbildung ist und $F = a_t^{-1}(F)$.

(ii) Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine $\mathfrak{F}^X$-Stoppzeit, wenn τ eine $\mathfrak{F}^X(\infty)$-messbare Abbildung ist und für alle $t \in \mathcal{T}$ und $\omega, \bar{\omega} \in \Omega$ gilt:

$$\Big[\tau(\omega) \leq t \text{ und } X(s, \omega) = X(s, \bar{\omega}) \text{ für alle } s \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t\Big] \text{ impliziert } \tau(\bar{\omega}) \leq t.$$

Aufgabe 2
Sei W eine Brownsche Bewegung und X die zugehörige Brownsche Brücke. Zeigen Sie, dass X ein stetiger, zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(s, t) \triangleq s \wedge t - st$$

ist. Zeigen Sie außerdem, dass X nicht $\mathfrak{F}^W$-adaptiert ist.

$\longrightarrow$ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 3
Seien $\kappa, \sigma > 0$ und W eine Brownsche Bewegung. Definiere $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{-\kappa t} W\big(\tfrac{\sigma^2}{2\kappa}(e^{2\kappa t} - 1)\big) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist.

Aufgabe 4

(i) Für $q \in (0,1]$ sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) \triangleq x^q$. Für welche $p \in (0,1]$ ist diese Funktion p-Hölderstetig? Für welche $p \in (0,1]$ ist die Funktion p-Hölderstetig in jedem Punkt $x \in [0,1]$?

(ii) Seien $p \in (0,1]$, $a \in (0,1)$ und $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \triangleq \begin{cases} -1/\log(x) & \text{falls } x \in (0,a], \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zwar gleichmäßig stetig, aber nicht p-Hölderstetig ist.