Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 02. November, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung. Zeigen Sie, dass X genau dann $\mathfrak{F}$-adaptiert ist, wenn

$$\mathfrak{F}^X(t) \subset \mathfrak{F}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Aufgabe 2
Sei $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung. Zeigen Sie, dass τ genau dann eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit ist, wenn der Indikatorprozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$X(t) \triangleq \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T}$$

ein $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess ist.

Aufgabe 3
Sei $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit bezüglich einer Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{F}(\tau)$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass wenn $t \in \mathcal{T}$ und $\tau(\omega) = t$ für alle $\omega \in \Omega$, dass dann $\mathfrak{F}(\tau) = \mathfrak{F}(t)$.

Aufgabe 4
Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Filtrierung und $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein reellwertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter, rechtsstetiger, wachsender stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass die Treffzeit $\tau_{[a,\infty)}$ von $[a,\infty)$ durch X für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit ist.