Stochastische Prozesse
Übungsblatt 1

Abgabe: Donnerstag, 26. Oktober, 13:45 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot,\omega) \triangleq \{X(t,\omega)\}_{t\in\mathcal{T}}$$

genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbar ist, wenn für alle $t \in \mathcal{T}$

$$X(t) : \Omega \to S, \qquad \omega \mapsto X(t,\omega)$$

eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung ist.
Hinweis: Die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra auf $S^{\mathcal{T}}$, welche alle Koordinatenabbildungen π_t, $t \in \mathcal{T}$, mit

$$\pi_t : S^{\mathcal{T}} \to S, \qquad f \mapsto \pi_t(f) \triangleq f(t)$$

messbar macht, d.h. $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\pi_t : t \in \mathcal{T}) = \sigma(\{\pi_t \in B\} : B \in \mathfrak{S}, t \in \mathcal{T})$.

Aufgabe 2
Seien $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ und $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ zwei stochastische Prozesse. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann identisch verteilt sind, wenn X und Y dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ durch das System aller endlich-dimensionalen Zylindermengen

$$\mathfrak{Z} \triangleq \left\{ \bigtimes_{t\in\mathcal{T}} B_t \;:\; B_t \in \mathfrak{S} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T} \right\}.$$

erzeugt wird, d.h. $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} = \sigma(\mathfrak{Z})$. Argumentieren Sie dann über die Eindeutigkeit von Maßen auf schnittsstabilen Erzeugern.

⟶ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 3
Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) X hat unabhängige Inkremente.

(ii) $X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1) - X(t_0), X(t_0)$ sind unabhängig für alle $[t_0, t_1, \ldots, t_n] \subset \mathcal{T}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um Unabhängigkeit zu beweisen. Wir erinnern uns an folgende Möglichkeiten:
(1) Zufallsvariablen sind unabhängig, wenn die von den Zufallsvariablen erzeugten σ-Algebren unabhängig sind. Dabei genügt es, die Unabhängigkeit auf schnittstabilen Erzeugern zu beweisen.
(2) Um zu zeigen, dass zwei Zufallsvariablen Y und Z unabhängig sind, kann man auch zeigen, dass die charakteristische Funktion des Vektors (Y, Z) das Produkt der charakteristischen Funktion von Y und der charakteristischen Funktion von Z ist.

Aufgabe 4
Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess. Zeigen Sie, das X genau dann ein Random Walk ist, wenn $X(0) = 0$ und X stationäre und unabhängige Inkremente hat.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.