

Übungen zur Feynman-Kac Darstellung

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
19. Juli 2017



Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + a(t, X(t)).dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$



Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + a(t, X(t)).dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}[u](t, x) + h(t, x) - k(t, x)u(t, x) = 0, \quad u(T, x) = g(x),$$



Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

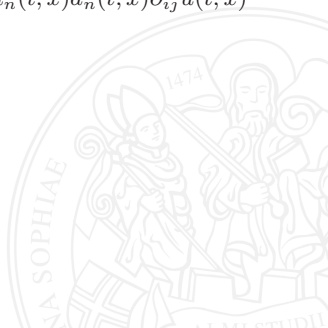
$$dX(t) = b(t, X(t))dt + a(t, X(t)).dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}[u](t, x) + h(t, x) - k(t, x)u(t, x) = 0, \quad u(T, x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator \mathcal{L} gegeben ist durch

$$\mathcal{L}[u](t, x) \triangleq \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \partial_i u(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{n=1}^N a_n^i(t, x) a_n^j(t, x) \partial_{ij}^2 u(t, x)$$



Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

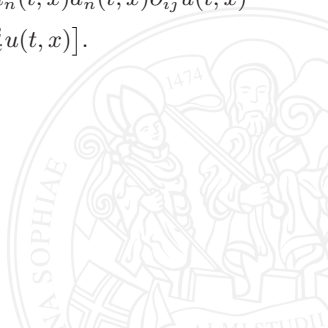
$$dX(t) = b(t, X(t))dt + a(t, X(t)).dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}[u](t, x) + h(t, x) - k(t, x)u(t, x) = 0, \quad u(T, x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator \mathcal{L} gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u](t, x) &\triangleq \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \partial_i u(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{n=1}^N a_n^i(t, x) a_n^j(t, x) \partial_{ij}^2 u(t, x) \\ &= b(t, x)^\top D_x u(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} [a(t, x) a(t, x)^\top D_x^2 u(t, x)]. \end{aligned}$$



Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + a(t, X(t)).dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}[u](t, x) + h(t, x) - k(t, x)u(t, x) = 0, \quad u(T, x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator \mathcal{L} gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u](t, x) &\triangleq \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \partial_i u(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{n=1}^N a_n^i(t, x) a_n^j(t, x) \partial_{ij}^2 u(t, x) \\ &= b(t, x)^\top D_x u(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} [a(t, x) a(t, x)^\top D_x^2 u(t, x)]. \end{aligned}$$

Unter Integrierbarkeitsbedingungen gilt die **Feynman-Kac Darstellung**

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}_{t_0} \left[e^{-\int_{t_0}^T k(s, X(s)) ds} g(X(T)) + \int_{t_0}^T e^{-\int_{t_0}^\tau k(s, X(s)) ds} h(\tau, X(\tau)) d\tau \right].$$

Aufgabe 1

Finden Sie den Differentialoperator \mathcal{L} für folgenden Prozess:

$$dX(t) = Y(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW_1(t),$$

$$dY(t) = \alpha(\beta - Y(t))dt + \nu dW_2(t).$$



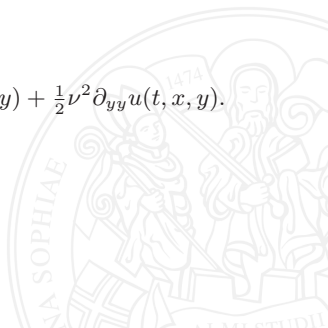
Aufgabe 1

Finden Sie den Differentialoperator \mathcal{L} für folgenden Prozess:

$$\begin{aligned}dX(t) &= Y(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW_1(t), \\dY(t) &= \alpha(\beta - Y(t))dt + \nu dW_2(t).\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](t, x, y) &= xy\partial_x u(t, x, y) + \alpha(\beta - y)\partial_y u(t, x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} u(t, x, y) + \frac{1}{2}\nu^2 \partial_{yy} u(t, x, y).\end{aligned}$$



Aufgabe 2

Finden Sie den Differentialoperator \mathcal{L} für folgenden Prozess:

$$dX(t) = Y(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW_1(t),$$

$$dY(t) = \alpha(\beta - Y(t))dt + \nu dW_2(t),$$

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt.$$



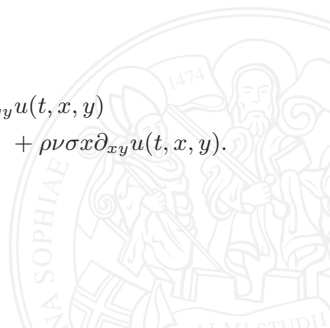
Aufgabe 2

Finden Sie den Differentialoperator \mathcal{L} für folgenden Prozess:

$$\begin{aligned}dX(t) &= Y(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW_1(t), \\dY(t) &= \alpha(\beta - Y(t))dt + \nu dW_2(t), \\dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt.\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](t, x, y) &= xy\partial_x u(t, x, y) + \alpha(\beta - y)\partial_y u(t, x, y) \\&+ \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} u(t, x, y) + \frac{1}{2}\nu^2 \partial_{yy} u(t, x, y) \\&+ \rho\nu\sigma x \partial_{xy} u(t, x, y).\end{aligned}$$



Aufgabe 3

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \mu x \partial_1 u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{11}^2 u(t, x) &= 0, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}_+, \\ u(T, x) &= \log(x^2), & x \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$



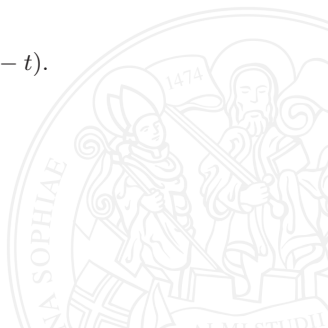
Aufgabe 3

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \mu x \partial_1 u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{11}^2 u(t, x) &= 0, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}_+, \\ u(T, x) &= \log(x^2), & x \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Lösung:

$$u(t, x) = \log(x^2) + 2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t).$$



Aufgabe 4

Seien $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{11}^2 u(t, x) + \frac{1}{2}\nu^2 \partial_{22}^2 u(t, x) &= 0, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^2, \\ u(T, x) &= x_1 x_2, & x \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$



Aufgabe 4

Seien $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{11}^2 u(t, x) + \frac{1}{2}\nu^2 \partial_{22}^2 u(t, x) &= 0, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^2, \\ u(T, x) &= x_1 x_2, & x \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Lösung:

$$u(t, x) = x_1 x_2.$$

