Universität Trier

Übungen zur Feynman-Kac Darstellung

Tutorium

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

19. Juli 2017

Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + a(t, X(t)).\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + a(t, X(t)).\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}[u](t,x) + h(t,x) - k(t,x)u(t,x) = 0, \qquad u(T,x) = g(x),$$

Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + a(t, X(t)).\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}[u](t,x) + h(t,x) - k(t,x)u(t,x) = 0, \qquad u(T,x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{L}[u](t,x) \triangleq \sum_{i=1}^{d} b^i(t,x)\partial_i u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{n=1}^{N} a_n^i(t,x)a_n^j(t,x)\partial_{ij}^2 u(t,x)$$

Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + a(t, X(t)).\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}[u](t,x) + h(t,x) - k(t,x)u(t,x) = 0, \qquad u(T,x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](t,x) &\triangleq \textstyle\sum_{i=1}^d b^i(t,x)\partial_i u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sum_{n=1}^N a_n^i(t,x)a_n^j(t,x)\partial_{ij}^2 u(t,x) \\ &= b(t,x)^\top \mathrm{D}_x u(t,x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\big[a(t,x)a(t,x)^\top \mathrm{D}_x^2 u(t,x)\big].\end{aligned}$$

Die Feynman-Kac Darstellung

Sei X die Lösung der **stochastischen Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + a(t, X(t)).\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

und sei $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}[u](t,x) + h(t,x) - k(t,x)u(t,x) = 0, \qquad u(T,x) = g(x),$$

wobei der Differentialoperator $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](t,x) &\triangleq \textstyle\sum_{i=1}^d b^i(t,x)\partial_i u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sum_{n=1}^N a_n^i(t,x)a_n^j(t,x)\partial_{ij}^2 u(t,x) \\ &= b(t,x)^\top \mathrm{D}_x u(t,x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\big[a(t,x)a(t,x)^\top \mathrm{D}_x^2 u(t,x)\big].\end{aligned}$$

Unter Integrierbarkeitsbedingungen gilt die **Feynman-Kac Darstellung**

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}_{t_0}\Big[e^{-\int_{t_0}^T k(s,X(s))\mathrm{d}s} g(X(T)) + \int_{t_0}^T e^{-\int_{t_0}^\tau k(s,X(s))\mathrm{d}s} h(\tau, X(\tau))\mathrm{d}\tau\Big].$$

Aufgabe 1

Finden Sie den Differentialoperator $\mathcal{L}$ für folgenden Prozess:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= Y(t)X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W_1(t), \\
\mathrm{d}Y(t) &= \alpha(\beta - Y(t))\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}W_2(t).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

Finden Sie den Differentialoperator $\mathcal{L}$ für folgenden Prozess:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= Y(t)X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W_1(t),\\
\mathrm{d}Y(t) &= \alpha(\beta - Y(t))\mathrm{d}t + \nu\mathrm{d}W_2(t).
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u](t,x,y) = xy\partial_x u(t,x,y) + \alpha(\beta - y)\partial_y u(t,x,y)\\
+ \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} u(t,x,y) + \tfrac{1}{2}\nu^2 \partial_{yy} u(t,x,y).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Finden Sie den Differentialoperator $\mathcal{L}$ für folgenden Prozess:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= Y(t)X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W_1(t), \\ \mathrm{d}Y(t) &= \alpha(\beta - Y(t))\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}W_2(t), \\ \mathrm{d}W_1(t)\mathrm{d}W_2(t) &= \rho \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Finden Sie den Differentialoperator $\mathcal{L}$ für folgenden Prozess:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= Y(t)X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W_1(t), \\ \mathrm{d}Y(t) &= \alpha(\beta - Y(t))\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}W_2(t), \\ \mathrm{d}W_1(t)\mathrm{d}W_2(t) &= \rho \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u](t,x,y) = xy\partial_x u(t,x,y) + \alpha(\beta - y)\partial_y u(t,x,y) \\ + \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} u(t,x,y) + \tfrac{1}{2}\nu^2 \partial_{yy} u(t,x,y) \\ + \rho\nu\sigma x \partial_{xy} u(t,x,y). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + \mu x \partial_1 u(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{11}^2 u(t,x) &= 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+, \\ u(T,x) &= \log(x^2), \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + \mu x \partial_1 u(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{11}^2 u(t,x) &= 0, \qquad && (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+, \\ u(T,x) &= \log(x^2), && x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Lösung:

$$u(t,x) = \log(x^2) + 2\big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)(T-t).$$

Aufgabe 4

Seien $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{11}^2 u(t,x) + \frac{1}{2}\nu^2 \partial_{22}^2 u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2,$$
$$u(T,x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 4

Seien $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit der Feynman-Kac Darstellung folgende PDE:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \partial_{11}^2 u(t,x) + \tfrac{1}{2}\nu^2 \partial_{22}^2 u(t,x) &= 0, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2, \\ u(T,x) &= x_1 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Lösung:

$$u(t,x) = x_1 x_2.$$