Universität Trier

Optionsbewertung im Black-Scholes Modell

Tutorium

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

12. Juli 2017

Das Black-Scholes Modell

Das **Black-Scholes Modell** (S^0, S^1) ist gegeben durch

$$S^0(t) = e^{rt} \quad \text{and} \quad S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \qquad t \in [0, T].$$

Das Modell ist **arbitragefrei** und **vollständig**. Es existiert also ein **eindeutiges äquivalentes Martingalmaß** $\mathbb{Q}$.

Das Black-Scholes Modell

Das **Black-Scholes Modell** (S^0, S^1) ist gegeben durch

$$S^0(t) = e^{rt} \quad \text{and} \quad S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \qquad t \in [0,T].$$

Das Modell ist **arbitragefrei** und **vollständig**. Es existiert also ein **eindeutiges äquivalentes Martingalmaß** $\mathbb{Q}$.

Nach dem **Satz von Girsanov** gilt

$$S^1(t) = s_1 e^{rt} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma B(t)} = s_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma B(t)} S^0(t), \qquad t \in [0,T],$$

für die $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung $B = W + \frac{\lambda}{\sigma} t$.

Preise: Europäischer Call und Digitale Optionen

Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)}C(T)\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\big[C(T)\big], \qquad t \in [0,T].$$

Preise: Europäischer Call und Digitale Optionen

Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)}C(T)\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\big[C(T)\big], \qquad t \in [0,T].$$

Beispiel: Europäischer Call $C(T) = \max\{S^1(T) - K, 0\}$. Es gilt

$$C(t) = S^1(t)\Phi(d_1) + e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2), \qquad t \in [0,T],$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und

$$d_1 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Preise: Europäischer Call und Digitale Optionen

Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)}C(T)\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\big[C(T)\big], \qquad t \in [0,T].$$

Beispiel: Europäischer Call $C(T) = \max\{S^1(T) - K, 0\}$. Es gilt

$$C(t) = S^1(t)\Phi(d_1) + e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2), \qquad t \in [0,T],$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und

$$d_1 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Beispiel: Digitaler Call $C(T) = \mathbb{1}_{\{S^1(T)>K\}}$. Es gilt

$$C(t) = e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad t \in [0,T].$$

Gap Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

$$C(T) = \left[S^1(T) - G\right]\mathbb{1}_{\{S^1(T)>K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.

Gap Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

$$C(T) = \left[S^1(T) - G\right] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.

Hinweis: Schreiben Sie den Gap Call als Linearkombination aus Vanilla Calls und Digitalen Calls.

Gap Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

$$C(T) = \left[S^1(T) - G\right] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.

Hinweis: Schreiben Sie den Gap Call als Linearkombination aus Vanilla Calls und Digitalen Calls.

Lösung: Es gilt

$$C(t) = S^1(t)\Phi(d_1) - Ge^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad t \in [0, T].$$

Paylater Call

Aufgabe

Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$, so dass der Preis $C(0)$ des **Paylater Calls**

$$C(T) = \left[S^1(T) - (K+p)\right] \mathbb{1}_{\{S^1(T)>K\}},$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null ist.

Paylater Call

Aufgabe

Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$, so dass der Preis $C(0)$ des **Paylater Calls**

$$C(T) = \left[S^1(T) - (K + p)\right] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null ist.

Lösung: Es gilt

$$p = s_1 e^{rT} \frac{\Phi(d_1)}{\Phi(d_2)} - K.$$

Asiatischer Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^{n} S^1\left(\tfrac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$

Asiatischer Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^{n} S^1\left(\tfrac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$

Hinweis 1: B ist ein Gaußprozess.

Asiatischer Call

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^{n} S^1\left(\tfrac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$

Hinweis 1: B ist ein Gaußprozess.

Hinweis 2: Schreiben Sie $A(T) = s_1 e^{\alpha + \beta Z}$ für standardnormalverteiltes Z und geeignete Konstanten α, β.

Asiatischer Call

Lösung: Der Preis $C(0)$ des **Asiatischen Calls** ist gegeben durch

$$C(0) = s_1 e^{-rT+\alpha+\frac{1}{2}\beta^2}\Phi\big(\tfrac{1}{\beta}\big[\log(s_1/K)+\alpha-\beta^2\big]\big) \\ - Ke^{-rT}\Phi\big(\tfrac{1}{\beta}\big[\log(s_1/K)+\alpha\big]\big),$$

wobei

$$\alpha \triangleq \tfrac{1}{2}\tfrac{n(n+1)}{n^2}\big(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\big)T, \quad \text{und} \quad \beta \triangleq \tfrac{1}{n\sqrt{n}}\sigma\sqrt{T}\big(\textstyle\sum_{k,j=1}^{n} k\wedge j\big)^{1/2}.$$