

Optionsbewertung im Black-Scholes Modell

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
12. Juli 2017



Das Black-Scholes Modell

Das **Black-Scholes Modell** (S^0, S^1) ist gegeben durch

$$S^0(t) = e^{rt} \quad \text{and} \quad S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Das Modell ist **arbitragefrei** und **vollständig**. Es existiert also ein **eindeutiges äquivalentes Martingalmaß** \mathbb{Q} .



Das Black-Scholes Modell

Das **Black-Scholes Modell** (S^0, S^1) ist gegeben durch

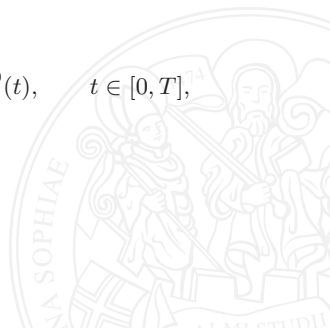
$$S^0(t) = e^{rt} \quad \text{and} \quad S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Das Modell ist **arbitragefrei** und **vollständig**. Es existiert also ein **eindeutiges äquivalentes Martingalmaß** \mathbb{Q} .

Nach dem **Satz von Girsanov** gilt

$$S^1(t) = s_1 e^{rt} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)} = s_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)} S^0(t), \quad t \in [0, T],$$

für die \mathbb{Q} -Brownsche Bewegung $B = W + \frac{\lambda}{\sigma}t$.



Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} C(T) \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [C(T)], \quad t \in [0, T].$$



Preise: Europäischer Call und Digitale Optionen

Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

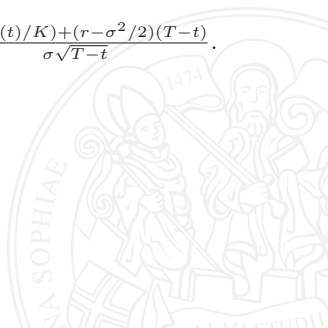
$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} C(T) \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [C(T)], \quad t \in [0, T].$$

Beispiel: Europäischer Call $C(T) = \max\{S^1(T) - K, 0\}$. Es gilt

$$C(t) = S^1(t) \Phi(d_1) + e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad t \in [0, T],$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und

$$d_1 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$



Preise: Europäischer Call und Digitale Optionen

Der **eindeutige faire Preis** einer Option $C(T)$ ist gegeben durch

$$C(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} C(T) \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [C(T)], \quad t \in [0, T].$$

Beispiel: Europäischer Call $C(T) = \max\{S^1(T) - K, 0\}$. Es gilt

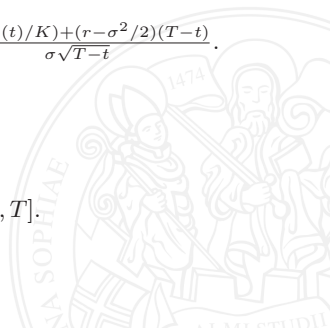
$$C(t) = S^1(t) \Phi(d_1) + e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad t \in [0, T],$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und

$$d_1 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 \triangleq \frac{\log(S^1(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Beispiel: Digitaler Call $C(T) = \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}}$. Es gilt

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad t \in [0, T].$$



Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

$$C(T) = [S^1(T) - G] \mathbf{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.



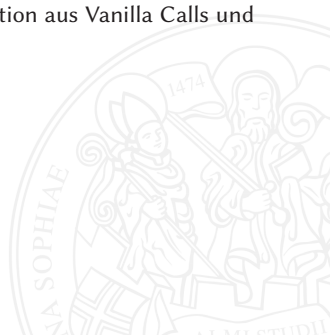
Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

$$C(T) = [S^1(T) - G] \mathbf{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.

Hinweis: Schreiben Sie den Gap Call als Linearkombination aus Vanilla Calls und Digitalen Calls.



Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis eines **Gap Calls**

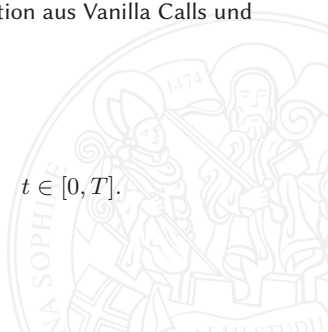
$$C(T) = [S^1(T) - G] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

wobei $0 \leq G < K$.

Hinweis: Schreiben Sie den Gap Call als Linearkombination aus Vanilla Calls und Digitalen Calls.

Lösung: Es gilt

$$C(t) = S^1(t)\Phi(d_1) - Ge^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad t \in [0, T].$$



Aufgabe

Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$, so dass der Preis $C(0)$ des **Paylater Calls**

$$C(T) = [S^1(T) - (K + p)] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null ist.



Aufgabe

Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$, so dass der Preis $C(0)$ des **Paylater Calls**

$$C(T) = [S^1(T) - (K + p)] \mathbb{1}_{\{S^1(T) > K\}},$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null ist.

Lösung: Es gilt

$$p = s_1 e^{rT} \frac{\Phi(d_1)}{\Phi(d_2)} - K.$$



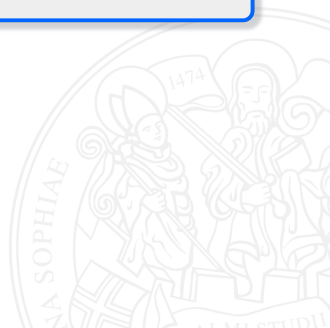
Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^n S^1\left(\frac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$



Aufgabe

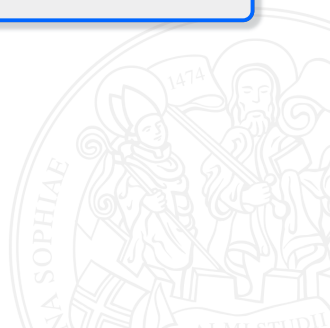
Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^n S^1\left(\frac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$

Hinweis 1: B ist ein Gaußprozess.



Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis $C(0)$ eines **Asiatischen Calls**

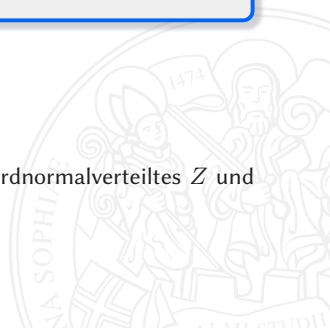
$$C(T) = \max\{A(T) - K, 0\}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei $A(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$A(T) = \prod_{k=1}^n S^1\left(\frac{k}{n}T\right)^{1/n}.$$

Hinweis 1: B ist ein Gaußprozess.

Hinweis 2: Schreiben Sie $A(T) = s_1 e^{\alpha + \beta Z}$ für standardnormalverteiltes Z und geeignete Konstanten α, β .



Lösung: Der Preis $C(0)$ des **Asiatischen Calls** ist gegeben durch

$$C(0) = s_1 e^{-rT + \alpha + \frac{1}{2}\beta^2} \Phi\left(\frac{1}{\beta} [\log(s_1/K) + \alpha - \beta^2]\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{1}{\beta} [\log(s_1/K) + \alpha]\right),$$

wobei

$$\alpha \triangleq \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \quad \text{und} \quad \beta \triangleq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sigma \sqrt{T} \left(\sum_{k,j=1}^n k \wedge j\right)^{1/2}.$$

