Universität Trier

Optionen und Marktmodelle

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
05. Juli 2017

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

- Plain Vanilla Optionen
- Exotische Optionen
- Europäisch, Amerikanisch, Bermuda
- Zinsderivate
- Kreditderivate
- Realoptionen
- ...

Bemerkung: Die Klassen überschneiden sich und lassen sich nicht immer eindeutig abgegrenzen.

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

- Plain Vanilla Optionen (**Stoch. Analysis und Math. Finance**)
- Exotische Optionen
- Europäisch, Amerikanisch, Bermuda
- Zinsderivate
- Kreditderivate
- Realoptionen
- ...

Bemerkung: Die Klassen überschneiden sich und lassen sich nicht immer eindeutig abgegrenzen.

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

- Plain Vanilla Optionen (**Stoch. Analysis und Math. Finance**)
- Exotische Optionen (**Übung**, evtl. **Tutorium**)
- Europäisch, Amerikanisch, Bermuda
- Zinsderivate
- Kreditderivate
- Realoptionen
- ...

Bemerkung: Die Klassen überschneiden sich und lassen sich nicht immer eindeutig abgegrenzen.

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

- Plain Vanilla Optionen (**Stoch. Analysis und Math. Finance**)
- Exotische Optionen (**Übung**, evtl. **Tutorium**)
- Europäisch, Amerikanisch, Bermuda
- Zinsderivate (**Zinsstruktur- und Kreditrisikomodelle**)
- Kreditderivate
- Realoptionen
- ...

Bemerkung: Die Klassen überschneiden sich und lassen sich nicht immer eindeutig abgegrenzen.

Was für Klassen von Optionen/Derivaten gibt es?

Verschiedene **Klassen von Optionen/Derivaten**:

- Plain Vanilla Optionen (**Stoch. Analysis und Math. Finance**)
- Exotische Optionen (**Übung**, evtl. **Tutorium**)
- Europäisch, Amerikanisch, Bermuda
- Zinsderivate (**Zinsstruktur- und Kreditrisikomodelle**)
- Kreditderivate (**Zinsstruktur- und Kreditrisikomodelle**)
- Realoptionen
- ...

Bemerkung: Die Klassen überschneiden sich und lassen sich nicht immer eindeutig abgegrenzen.

Plain Vanilla Optionen

Plain Vanilla Option: Das Recht zu bestimmten Ausübungszeitpunkten eine bestimmte Menge eines Underlyings zu einem vorher festgelegten Ausübungspreis zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Plain Vanilla Optionen

Plain Vanilla Option: Das Recht zu bestimmten Ausübungszeitpunkten eine bestimmte Menge eines Underlyings zu einem vorher festgelegten Ausübungspreis zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Plain Vanilla Call:

$$C(\tau) \triangleq \max\{S(\tau) - K, 0\}, \qquad \tau \in \mathcal{T}.$$

Plain Vanilla Put:

$$P(\tau) \triangleq \max\{K - S(\tau), 0\}, \qquad \tau \in \mathcal{T}.$$

Plain Vanilla Optionen

Plain Vanilla Option: Das Recht zu bestimmten Ausübungszeitpunkten eine bestimmte Menge eines Underlyings zu einem vorher festgelegten Ausübungspreis zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Plain Vanilla Call:

$$C(\tau) \triangleq \max\{S(\tau) - K, 0\}, \qquad \tau \in \mathcal{T}.$$

Plain Vanilla Put:

$$P(\tau) \triangleq \max\{K - S(\tau), 0\}, \qquad \tau \in \mathcal{T}.$$

Ausübungszeitpunkte:

- **Europäisch**: $\mathcal{T} = \{T\}$.
- **Amerikanisch**: $\mathcal{T} = [0, T]$.
- **Bermuda**: $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$.

Charakterisierung nach Underlying

Als **Underlying** findet man beispielsweise folgende Vermögenswerte:

Charakterisierung nach Underlying

Als **Underlying** findet man beispielsweise folgende Vermögenswerte:

- Aktien
- Indizes
- Währungen
- Anleihen
- Rohstoffe
- Elektrische Energie
- Wetter
- Optionen
- ...

Charakterisierung nach Underlying

Als **Underlying** findet man beispielsweise folgende Vermögenswerte:

- Aktien
- Indizes
- Währungen
- Anleihen
- Rohstoffe
- Elektrische Energie
- Wetter
- Optionen
- ...

Wichtig: Für die Bewertung benötigt man ein gutes Modell für den Wert des Underlyings.

Exotische Optionen

Exotische Option: Funktionieren wie Plain Vanilla Optionen, haben aber kompliziertere Auszahlungsprofile. Beispielsweise kann die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf abhängen.

Exotische Optionen

Exotische Option: Funktionieren wie Plain Vanilla Optionen, haben aber kompliziertere Auszahlungsprofile. Beispielsweise kann die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf abhängen.

- **Binäre/digitale Option**: $C(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) \geq K\}}$ bzw. $P(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) < K\}}$.

Exotische Optionen

Exotische Option: Funktionieren wie Plain Vanilla Optionen, haben aber kompliziertere Auszahlungsprofile. Beispielsweise kann die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf abhängen.

- **Binäre/digitale Option**: $C(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) \geq K\}}$ bzw. $P(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) < K\}}$.
- **Asiatische Option**: Auszahlung abhängig von Durchschnitt über mehrere Kurse, z.B.
$$C(T) \triangleq \max\{\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) - K, 0\}$$

Exotische Optionen

Exotische Option: Funktionieren wie Plain Vanilla Optionen, haben aber kompliziertere Auszahlungsprofile. Beispielsweise kann die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf abhängen.

- **Binäre/digitale Option**: $C(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) \geq K\}}$ bzw. $P(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) < K\}}$.
- **Asiatische Option**: Auszahlung abhängig von Durchschnitt über mehrere Kurse, z.B.
$$C(T) \triangleq \max\{\tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} S(t_i) - K, 0\}$$
- **Barriere Option**: Auszahlung nur, falls während der Laufzeit ein bestimmter Kurs (nicht) über-/unterschritten wurde, z.B.
$$C(T) \triangleq \max\{S(T) - K, 0\} \mathbb{1}_{\{\sup_{t \in [0,T]} S(t) \geq L\}}.$$

Exotische Optionen

Exotische Option: Funktionieren wie Plain Vanilla Optionen, haben aber kompliziertere Auszahlungsprofile. Beispielsweise kann die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf abhängen.

- **Binäre/digitale Option**: $C(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) \geq K\}}$ bzw. $P(T) \triangleq \alpha \mathbb{1}_{\{S(T) < K\}}$.
- **Asiatische Option**: Auszahlung abhängig von Durchschnitt über mehrere Kurse, z.B.
$$C(T) \triangleq \max\{\tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} S(t_i) - K, 0\}$$
- **Barriere Option**: Auszahlung nur, falls während der Laufzeit ein bestimmter Kurs (nicht) über-/unterschritten wurde, z.B.
$$C(T) \triangleq \max\{S(T) - K, 0\} \mathbb{1}_{\{\sup_{t \in [0,T]} S(t) \geq L\}}.$$
- **Basket Option**: Option auf gewichtete Summe mehrerer Underlyings:
$$C(T) \triangleq \max\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S^i(T) - K, 0\}.$$

Aufgabenstellung

Aufgabe

Bestimmen Sie den Preis einer Asiatischen Option mit Strike K.

Der Startpunkt: Das Black-Scholes Modell

Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst einen **Europäischen Call** im **Black-Scholes Modell**:

$$
\begin{aligned}
S^0(t) &= s_0 e^{rt}, && t \in [0,T], \\
S^1(t) &= s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, && t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Der Startpunkt: Das Black-Scholes Modell

Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst einen **Europäischen Call** im **Black-Scholes Modell**:

$$
\begin{aligned}
S^0(t) &= s_0 e^{rt}, && t \in [0,T],\\
S^1(t) &= s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, && t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Der Preis eines Europäischen Calls in diesem Modell ist

$$
C(t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\max\big\{S^1(T)-K,0\big\}\Big], \qquad t \in [0,T],
$$

wobei $\mathbb{Q}$ das eindeutige äquivalente Martingalmaß ist. Der Erwartungswert kann explizit ausgerechnet werden und hängt nicht von λ ab.

Der Startpunkt: Das Black-Scholes Modell

Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst einen **Europäischen Call** im **Black-Scholes Modell**:

$$S^0(t) = s_0 e^{rt}, \qquad t \in [0, T],$$

$$S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \qquad t \in [0, T].$$

Der Preis eines Europäischen Calls in diesem Modell ist

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \Big[\max\big\{ S^1(T) - K, 0 \big\} \Big], \qquad t \in [0, T],$$

wobei $\mathbb{Q}$ das eindeutige äquivalente Martingalmaß ist. Der Erwartungswert kann explizit ausgerechnet werden und hängt nicht von λ ab.

Frage: Wie bestimmt man die Parameter r und σ?

Der Startpunkt: Das Black-Scholes Modell

Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst einen **Europäischen Call** im **Black-Scholes Modell**:

$$S^0(t) = s_0 e^{rt}, \qquad t \in [0,T],$$
$$S^1(t) = s_1 e^{(r+\lambda-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \qquad t \in [0,T].$$

Der Preis eines Europäischen Calls in diesem Modell ist

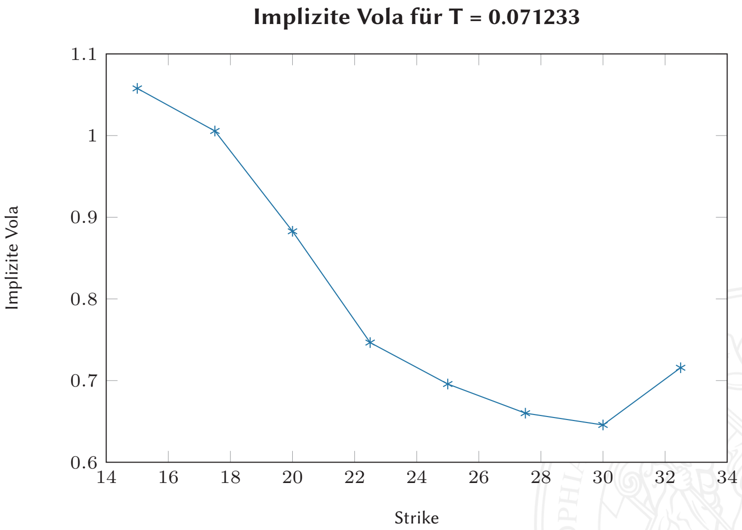
$$C(t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\max\big\{S^1(T) - K, 0\big\}\Big], \qquad t \in [0,T],$$

wobei $\mathbb{Q}$ das eindeutige äquivalente Martingalmaß ist. Der Erwartungswert kann explizit ausgerechnet werden und hängt nicht von λ ab.

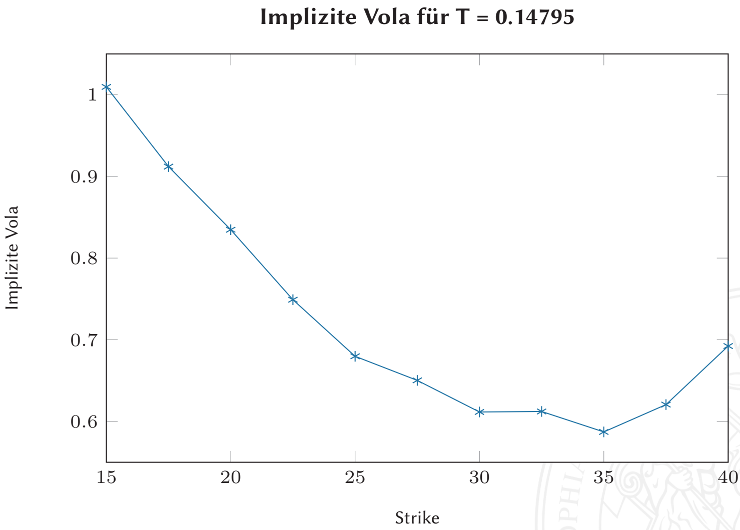
Frage: Wie bestimmt man die Parameter r und σ?

Antwort: Durch *Kalibrierung* an Marktdaten.

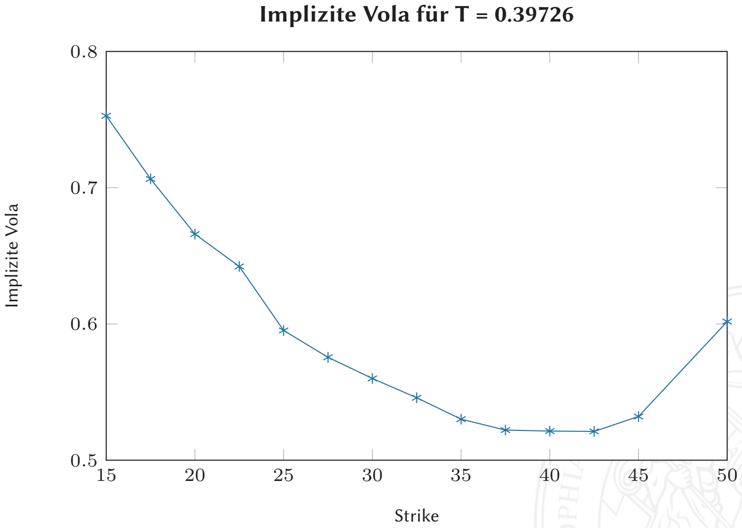
Implizite Volatilität



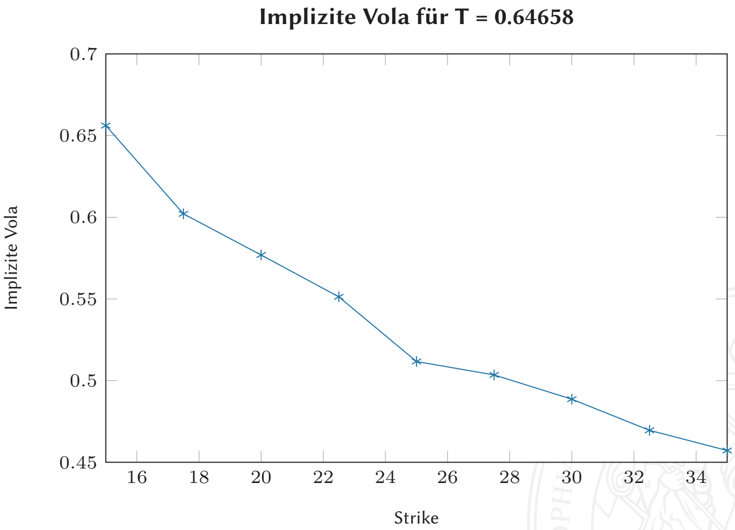
Implizite Volatilität



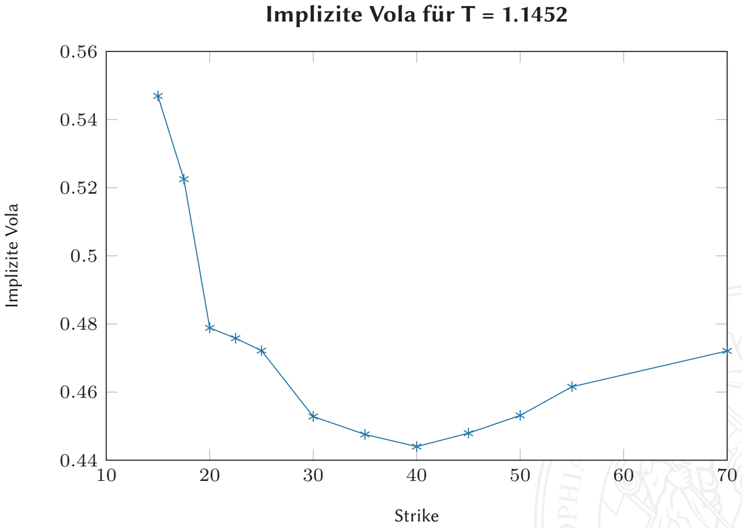
Implizite Volatilität



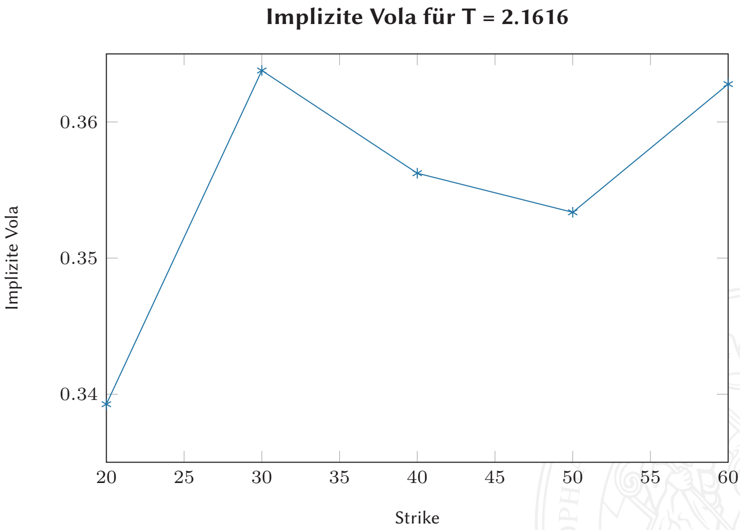
Implizite Volatilität



Implizite Volatilität



Implizite Volatilität



Beobachtungen zur impliziten Volatilität

Wir stellen fest:

- Das Black-Scholes Modell kann die tatsächlichen Marktpreise offensichtlich **nicht** erklären.

Beobachtungen zur impliziten Volatilität

Wir stellen fest:

- Das Black-Scholes Modell kann die tatsächlichen Marktpreise offensichtlich **nicht** erklären.
- Trotzdem spielt das Black-Scholes Modell eine wichtige Rolle: So werden anstatt Optionspreisen oft nur die **impliziten Volatilitäten** angegeben.

Beobachtungen zur impliziten Volatilität

Wir stellen fest:

- Das Black-Scholes Modell kann die tatsächlichen Marktpreise offensichtlich **nicht** erklären.
- Trotzdem spielt das Black-Scholes Modell eine wichtige Rolle: So werden anstatt Optionspreisen oft nur die **impliziten Volatilitäten** angegeben.
- Die impliziten Volatilitäten haben typischerweise eine von zwei charakteristischen Formen: **Volatility Smile** und **Volatility Skew**.

Beobachtungen zur impliziten Volatilität

Wir stellen fest:

- Das Black-Scholes Modell kann die tatsächlichen Marktpreise offensichtlich **nicht** erklären.
- Trotzdem spielt das Black-Scholes Modell eine wichtige Rolle: So werden anstatt Optionspreisen oft nur die **impliziten Volatilitäten** angegeben.
- Die impliziten Volatilitäten haben typischerweise eine von zwei charakteristischen Formen: **Volatility Smile** und **Volatility Skew**.
- Es gibt zwei mögliche Erweiterungen an das Black-Scholes Modell, um diese charakteristischen Formen zu erhalten: **Stochastische Volatilität** und **Sprünge im Preis des Underlyings**.

Beispiel: Das Heston Modell

In Differentialschreibweise ist der Preis von S^1 im **Black-Scholes Modell**

$$\mathrm{d}S^1(t) = (r + \lambda)S^1(t)\mathrm{d}t + \sigma S^1(t)\mathrm{d}W(t).$$

Beispiel: Das Heston Modell

In Differentialschreibweise ist der Preis von S^1 im **Black-Scholes Modell**

$$\mathrm{d}S^1(t) = (r+\lambda)S^1(t)\mathrm{d}t + \sigma S^1(t)\mathrm{d}W(t).$$

Im **Heston Modell** wird die konstante Volatilität σ durch einen stochastischen Prozess ersetzt:

$$\mathrm{d}S^1(t) = (r+\lambda)S^1(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\nu(t)}S^1(t)\mathrm{d}W(t),$$
$$\mathrm{d}\nu(t) = \kappa(\theta - \nu(t))\mathrm{d}t + \xi\sqrt{\nu(t)}\mathrm{d}B(t),$$

wobei B eine mit W korrelierte Brownsche Bewegung ist.

Beispiel: Das Heston Modell

In Differentialschreibweise ist der Preis von S^1 im **Black-Scholes Modell**

$$dS^1(t) = (r+\lambda)S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW(t).$$

Im **Heston Modell** wird die konstante Volatilität σ durch einen stochastischen Prozess ersetzt:

$$\begin{aligned} dS^1(t) &= (r+\lambda)S^1(t)dt + \sqrt{\nu(t)}S^1(t)dW(t), \\ d\nu(t) &= \kappa(\theta - \nu(t))dt + \xi\sqrt{\nu(t)}dB(t), \end{aligned}$$

wobei B eine mit W korrelierte Brownsche Bewegung ist.

Achtung: Das Heston Modell ist **unvollständig**!

Beispiel: Das Variance-Gamma Modell

Sei X eine Brownsche Bewegung mit Drift, d.h.

$$X(t) \triangleq \theta t + \sigma W(t), \qquad t \in [0, T],$$

und sei Y ein sogenannter **Gamma-Prozess**, d.h.

- Y ist càdlàg und startet in $Y(0) = 0$,
- Y hat unabhängige Inkremente,
- Y hat stationäre Gamma-verteilte Inkremente, d.h. $Y(t+h) - Y(t)$ ist Gamma-verteilt mit Mittelwert μh und Varianz νh

Beispiel: Das Variance-Gamma Modell

Sei X eine Brownsche Bewegung mit Drift, d.h.

$$X(t) \triangleq \theta t + \sigma W(t), \qquad t \in [0, T],$$

und sei Y ein sogenannter **Gamma-Prozess**, d.h.

- Y ist càdlàg und startet in $Y(0) = 0$,
- Y hat unabhängige Inkremente,
- Y hat stationäre Gamma-verteilte Inkremente, d.h. $Y(t+h) - Y(t)$ ist Gamma-verteilt mit Mittelwert μh und Varianz νh

Der **Variance-Gamma Prozess** Z ist dann definiert als

$$Z(t) \triangleq X(Y(t)), \qquad t \in [0, T].$$

Beispiel: Das Variance-Gamma Modell

Sei X eine Brownsche Bewegung mit Drift, d.h.

$$X(t) \triangleq \theta t + \sigma W(t), \qquad t \in [0, T],$$

und sei Y ein sogenannter **Gamma-Prozess**, d.h.

- Y ist càdlàg und startet in $Y(0) = 0$,
- Y hat unabhängige Inkremente,
- Y hat stationäre Gamma-verteilte Inkremente, d.h. $Y(t+h) - Y(t)$ ist Gamma-verteilt mit Mittelwert μh und Varianz νh

Der **Variance-Gamma Prozess** Z ist dann definiert als

$$Z(t) \triangleq X(Y(t)), \qquad t \in [0, T].$$

Ein **Modell** für den Preis des Wertpapiers S^1 erhält man dann durch Anwenden der Exponentialfunktion.