Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 12. Juli, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Es seien B^1 und B^2 Brownsche Bewegungen in $\mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{d}B^1(t)\mathrm{d}B^2(t) = \rho(t)\mathrm{d}t$$

für einen $(-1,1)$-wertigen, vorhersagbaren Prozess ρ. Definiere $W = (W^1, W^2)$ durch

$$W^1 \triangleq B^1 \quad \text{und} \quad W^2 \triangleq -\tfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \bullet B^1 + \tfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \bullet B^2.$$

Zeigen Sie, dass W eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2

Sei $S = (S^0, S^1)$ ein Finanzmarkt mit $S^0(t) = 1$ für alle $t \in [0,T]$ und

$$\mathrm{d}S^1(t) = 2\mathrm{d}t + \mathrm{d}W^1(t) + 2\mathrm{d}W^2(t), \qquad S^1(0) = 1,$$

wobei $W = (W^1, W^2)$ eine $\mathbb{R}^2$-wertige Brownsche Bewegung ist. Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 3

Sei W eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Angenommen der Prozess $M = \{M(t)\}_{t \in [0,T]}$ gegeben durch

$$M(t) \triangleq f(t, W(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]$$

ist ein lokales Martingal. Bestimmen Sie den Integranden H in der Martingaldarstellung von M explizit.

Aufgabe 4

Sei $W = (W^1, \dots, W^n)$ eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^n$ und sei, für alle $i = 1, \dots, n$, ein Prozess X^i gegeben durch

$$\mathrm{d}X^i(t) = -\kappa X^i(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W^i(t),$$

wobei $\kappa, \sigma > 0$. Definiere einen Prozess Y durch

$$Y(t) \triangleq \textstyle\sum_{i=1}^n X^i(t)^2, \qquad t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass Y folgende *Cox-Ingersoll-Ross* Dynamik besitzt:

$$\mathrm{d}Y(t) = -\alpha[Y(t) - \beta]\mathrm{d}t + \gamma\sqrt{Y(t)}\mathrm{d}B(t),$$

wobei B eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$ ist und $\alpha, \beta, \gamma > 0$.