Universität Trier

Der Beweis der Itô-Formel

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
14. Juni 2017

Die Itô-Formel

Die eindimensionale Itô-Formel

Sei X ein reellwertiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann ist $f(X)$ ein Semimartingal und

$$f(X) = f(X(0)) + \partial f(X) \bullet X + \frac{1}{2}\partial^2 f(X) \bullet \langle X \rangle.$$

Lemma 1

Sei X ein Semimartingal und $\langle X \rangle$ gleichmäßig beschränkt. Weiter sei $\{H^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge vorhersagbarer Prozesse, so dass

$$H^n(t,\omega) \to H(t,\omega) \quad \text{für alle } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega,$$

und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |H^n(t)| \leq \alpha$ für ein $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\sup_{t\in[0,T]} |H^n \bullet X(t) - H \bullet X(t)| \to 0 \text{ in W'Keit für } n \to \infty.$$

Lemma 2

Lemma 2

Sei M ein beschränktes, stetiges Martingal und H beschränkt, stetig und adaptiert. Für eine Partition $\pi = [t_0, \ldots, t_n]$ definiere R_π via

$$R_\pi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} H(t_{k-1})[\mathrm{d}M(t_{k-1}, t \wedge t_k)]^2, \qquad t \in [0, T].$$

Dann gilt, dass

$$\sup_{t\in[0,T]} |R_\pi(t) - H \bullet \langle M \rangle(t)| \to 0 \text{ in W'Keit für } |\pi| \downarrow 0.$$

Lemma 3

Lemma 3

Sei M ein beschränktes, stetiges Martingal. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi^n = [t_0^n, \ldots, t_n^n]$ eine Partition, so dass $|\pi^n| \to 0$ für $n \to \infty$. Weiter sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein durch $\epsilon_n > 0$ gleichmäßig beschränkter Prozess H^n gegeben, so dass $\epsilon_n \to 0$. Definiere einen Prozess R^n via

$$R^n(t) \triangleq \sum_{k=1}^n H^n(t_{k-1}^n)[\mathrm{d}M(t_{k-1}^n, t \wedge t_k^n)]^2, \qquad t \in [0, T].$$

Dann gilt, dass

$$\sup_{t \in [0,T]} |R^n(t)| \to 0 \text{ in W'Keit für } n \to \infty.$$