

Der Beweis der Itô-Formel

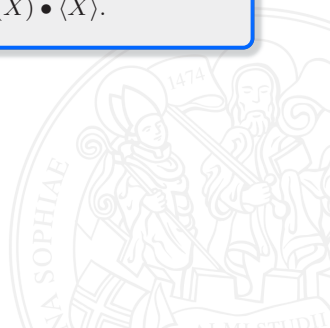
Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
14. Juni 2017



Die eindimensionale Itô-Formel

Sei X ein reellwertiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann ist $f(X)$ ein Semimartingal und

$$f(X) = f(X(0)) + \partial f(X) \bullet X + \frac{1}{2} \partial^2 f(X) \bullet \langle X \rangle.$$



Lemma 1

Sei X ein Semimartingal und $\langle X \rangle$ gleichmäßig beschränkt. Weiter sei $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge vorhersagbarer Prozesse, so dass

$$H^n(t, \omega) \rightarrow H(t, \omega) \quad \text{für alle } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega,$$

und $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in [0, T]} |H^n(t)| \leq \alpha$ für ein $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\sup_{t \in [0, T]} |H^n \bullet X(t) - H \bullet X(t)| \rightarrow 0 \text{ in } W\text{-Keit für } n \rightarrow \infty.$$

Lemma 2

Sei M ein beschränktes, stetiges Martingal und H beschränkt, stetig und adaptiert. Für eine Partition $\pi = [t_0, \dots, t_n]$ definiere R_π via

$$R_\pi(t) \triangleq \sum_{k=1}^n H(t_{k-1}) [dM(t_{k-1}, t \wedge t_k)]^2, \quad t \in [0, T].$$

Dann gilt, dass

$$\sup_{t \in [0, T]} |R_\pi(t) - H \bullet \langle M \rangle(t)| \rightarrow 0 \text{ in W'keit für } |\pi| \downarrow 0.$$

Lemma 3

Sei M ein beschränktes, stetiges Martingal. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi^n = [t_0^n, \dots, t_n^n]$ eine Partition, so dass $|\pi^n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein durch $\epsilon_n > 0$ gleichmäßig beschränkter Prozess H^n gegeben, so dass $\epsilon_n \rightarrow 0$. Definiere einen Prozess R^n via

$$R^n(t) \triangleq \sum_{k=1}^n H^n(t_{k-1}^n) [dM(t_{k-1}^n, t \wedge t_k^n)]^2, \quad t \in [0, T].$$

Dann gilt, dass

$$\sup_{t \in [0, T]} |R^n(t)| \rightarrow 0 \text{ in W'keit für } n \rightarrow \infty.$$