

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 05. Juli, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Betrachte eine Option mit Auszahlung

$$C(T) = g(S^1(T)),$$

wobei $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zweimal stetig differenzierbar mit $g(0) = g'(0) = 0$ ist. Zeigen Sie, dass der Preis C der Option dargestellt werden kann als

$$C(t) = \int_0^\infty g''(K) C_K(t) dK, \quad t \in [0, T],$$

wobei C_K den Preis einer Europäischen Call Option auf S^1 mit Strike K bezeichnet. Warum ist diese Darstellung nützlich?

Hinweis: Warum genügt es, die Darstellung für $t = T$ zu beweisen?

Aufgabe 2

Sei S ein Finanzmarkt mit äquivalentem Martingalmaß \mathbb{Q} . Wir nehmen an, dass ein stetiges Martingal Z existiert, so dass

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathfrak{F}(t)} = Z(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Definiere den sogenannten *Deflator*-Prozess $D = \{D(t)\}_{t \in [0, T]}$ durch

$$D(t) \triangleq \frac{Z(t)}{S^0(t)} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass dann der Prozess $DX^\varphi = \{D(t)X^\varphi(t)\}_{t \in [0, T]}$ für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie φ ein lokales \mathbb{P} -Martingal ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert in der Konstruktion der Verdoppelungsstrategie φ (siehe Skript für Details) die folgende Gleichung erfüllen:

$$\mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : \omega \in F_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}] = 1.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Verdoppelungsstrategie φ (siehe Skript und Aufgabe 3) nicht zulässig ist.