Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 28. Juni, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Sei M ein lokales Martingal and seien H und K integrierbar bezüglich M. Zeigen Sie, dass

$$H \bullet M = K \bullet M \text{ genau dann, wenn } H = K \ \mu\text{-a.e.,}$$

wobei μ das Doléans-Maß von M bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und schreibe

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}l(t), \qquad \text{wobei } l(t) \triangleq t, \qquad t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}W(t)\mathrm{d}W(t) = \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}W(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0.$$

Aufgabe 3

Sei W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und $r, \lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$. Definiere einen stochastischen Prozess X durch

$$X(t) \triangleq e^{[r+\lambda-\frac{1}{2}\sigma^2]t+\sigma W(t)}, \qquad t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}X(t) = X(t)\big[(r+\lambda)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t)\big].$$

Unter welchen Bedingungen ist X ein Martingal?

Aufgabe 4

Sei X ein $\mathbb{R}$-wertiges Semimartingal und $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y \triangleq f(t, X(t))$ ein Semimartingal ist und

$$\mathrm{d}f(t, X(t)) = \partial_t f(t, X(t))\mathrm{d}t + \partial_x f(t, X(t))\mathrm{d}X(t) + \tfrac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X(t))\mathrm{d}X(t)\mathrm{d}X(t).$$

Hinweis: Sie dürfen Lemma 31 und Lemma 32 im Skript benutzen. Sie dürfen *nicht* o.B.d.A. annehmen, dass X und $\langle X \rangle$ beschränkt sind.