Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 21. Juni, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Sei W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und $\mu_k(t) \triangleq \mathbb{E}[W(t)^k]$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel, dass

$$\mu_k(t) = \tfrac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \mu_{k-2}(s)\mathrm{d}s, \qquad k \geq 2.$$

Berechnen Sie damit $\mathbb{E}[W(t)^4]$.

Aufgabe 2

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T f'(s)W(s)\mathrm{d}s\Big)^2\Big] = f(T)^2T - 2f(T)\int_0^T f(s)\mathrm{d}s + \int_0^T f(s)^2\mathrm{d}s.$$

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[(\int_0^T W(s)\mathrm{d}s)^2]$.

Aufgabe 3

Sei W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Weiter sei $H : [0,T] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $H(t) \triangleq e^{\beta t}$, $t \in [0,T]$. Definiere einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{-\beta t}x + \tfrac{\alpha}{\beta}\big(1 - e^{-\beta t}\big) + \sigma e^{-\beta t}(H \bullet W)(t), \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass X die folgende Ornstein-Uhlenbeck Gleichung löst:

$$\mathrm{d}X(t) = [\alpha - \beta X(t)]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x.$$

Aufgabe 4

Sei W eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brownsche Bewegung und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ sei harmonisch, d.h.

$$\Delta f(x) \triangleq \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = 0 \qquad \text{für all } x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass $f(W)$ ein lokales Martingal ist.