Universität Trier

Das Itô-Integral und das Stratonovich-Integral

Tutorium

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

31. Mai 2017

Der Plan für heute

Unser Plan

(1) Wiederholung: Konstruktion des stochastischen Integrals

(2) Erweiterung auf eine größere Klasse von Integranden, Martingaleigenschaft

(3) Beispiel: Brownsche Bewegung, Berechnung des Integrals

(4) Das Stratonovich Integral

Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{M}^2$, definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} h_k \mathrm{d}M(\tau_{k-1}, \tau_k), \qquad t \in [0, T].$$

Beachte: $H \bullet M$ ist ein L^2-Martingal.

Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{M}^2$, definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} h_k \mathrm{d}M(\tau_{k-1}, \tau_k), \qquad t \in [0, T].$$

  Beachte: $H \bullet M$ ist ein L^2-Martingal.

- Sei $H \in \mathcal{I}^2(M)$. Dann existiert eine Cauchy-Folge $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die in $\mathcal{I}^2(M)$ gegen H konvergiert.

Konstruktion des stochastischen Integrals

Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{M}^2$, definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} h_k \mathrm{d}M(\tau_{k-1}, \tau_k), \qquad t \in [0, T].$$

  Beachte: $H \bullet M$ ist ein L^2-Martingal.

- Sei $H \in \mathcal{I}^2(M)$. Dann existiert eine Cauchy-Folge $\{H^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die in $\mathcal{I}^2(M)$ gegen H konvergiert.
- Damit ist auch $\{H^n \bullet M\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{M}^2$, da die Abbildung

$$\mathcal{E} \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathcal{M}^2$$

  eine Isometrie ist.

Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{M}^2$, definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} h_k \mathrm{d}M(\tau_{k-1}, \tau_k), \qquad t \in [0, T].$$

  Beachte: $H \bullet M$ ist ein L^2-Martingal.

- Sei $H \in \mathcal{I}^2(M)$. Dann existiert eine Cauchy-Folge $\{H^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die in $\mathcal{I}^2(M)$ gegen H konvergiert.
- Damit ist auch $\{H^n \bullet M\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{M}^2$, da die Abbildung

$$\mathcal{E} \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathcal{M}^2$$

  eine Isometrie ist.

- Wir definieren $H \bullet M$ als den $\mathcal{M}^2$-Grenzwert von $\{H^n \bullet M\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- M ein lokales Martingal und

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- M ein lokales Martingal und
- H ein vorhersagbarer Prozess mit $H^2 \bullet \langle M \rangle (T) < \infty$ (ohne Erwartungswert).

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- M ein lokales Martingal und
- H ein vorhersagbarer Prozess mit $H^2 \bullet \langle M \rangle(T) < \infty$ (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge** $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$ ein L^2-Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle(T)] < \infty$ gilt.

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- M ein lokales Martingal und
- H ein vorhersagbarer Prozess mit $H^2 \bullet \langle M \rangle(T) < \infty$ (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge** $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$ ein L^2-Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle(T)] < \infty$ gilt.

Dann existiert ein Prozess $H \bullet M$, so dass

$$H \bullet M(\cdot \wedge \tau_k) = H \bullet M_k.$$

Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- M ein lokales Martingal und
- H ein vorhersagbarer Prozess mit $H^2 \bullet \langle M \rangle (T) < \infty$ (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge** $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$ ein L^2-Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle (T)] < \infty$ gilt.

Dann existiert ein Prozess $H \bullet M$, so dass

$$H \bullet M(\cdot \wedge \tau_k) = H \bullet M_k.$$

Das stochastische Integral $H \bullet M$ ist dann automatisch ein **lokales Martingal**.