

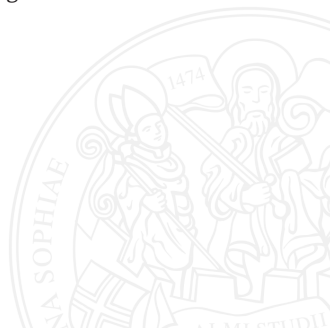
# Das Itô-Integral und das Stratonovich-Integral

**Tutorium**  
**Stochastische Analysis und Mathematical Finance**  
31. Mai 2017



## Unser Plan

- (1) Wiederholung: Konstruktion des stochastischen Integrals
- (2) Erweiterung auf eine größere Klasse von Integranden, Martingaleigenschaft
- (3) Beispiel: Brownsche Bewegung, Berechnung des Integrals
- (4) Das Stratonovich Integral



## Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals



## Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für  $H \in \mathcal{E}$  und  $M \in \mathcal{M}^2$ , definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^n h_k dM(\tau_{k-1}, \tau_k), \quad t \in [0, T].$$

**Beachte:**  $H \bullet M$  ist ein  $L^2$ -Martingal.



## Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für  $H \in \mathcal{E}$  und  $M \in \mathcal{M}^2$ , definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^n h_k dM(\tau_{k-1}, \tau_k), \quad t \in [0, T].$$

**Beachte:**  $H \bullet M$  ist ein  $L^2$ -Martingal.

- Sei  $H \in \mathcal{I}^2(M)$ . Dann existiert eine Cauchy-Folge  $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die in  $\mathcal{I}^2(M)$  gegen  $H$  konvergiert.



## Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für  $H \in \mathcal{E}$  und  $M \in \mathcal{M}^2$ , definiere das stochastische Integral

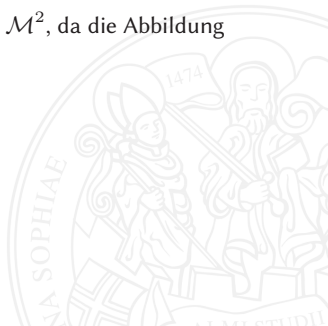
$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^n h_k dM(\tau_{k-1}, \tau_k), \quad t \in [0, T].$$

**Beachte:**  $H \bullet M$  ist ein  $L^2$ -Martingal.

- Sei  $H \in \mathcal{I}^2(M)$ . Dann existiert eine Cauchy-Folge  $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die in  $\mathcal{I}^2(M)$  gegen  $H$  konvergiert.
- Damit ist auch  $\{H^n \bullet M\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{M}^2$ , da die Abbildung

$$\mathcal{E} \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathcal{M}^2$$

eine Isometrie ist.



## Konstruktion des stochastischen (Itô-) Integrals

- Für  $H \in \mathcal{E}$  und  $M \in \mathcal{M}^2$ , definiere das stochastische Integral

$$H \bullet M(t) \triangleq \sum_{k=1}^n h_k dM(\tau_{k-1}, \tau_k), \quad t \in [0, T].$$

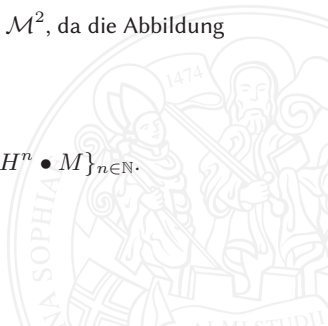
**Beachte:**  $H \bullet M$  ist ein  $L^2$ -Martingal.

- Sei  $H \in \mathcal{I}^2(M)$ . Dann existiert eine Cauchy-Folge  $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die in  $\mathcal{I}^2(M)$  gegen  $H$  konvergiert.
- Damit ist auch  $\{H^n \bullet M\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{M}^2$ , da die Abbildung

$$\mathcal{E} \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathcal{M}^2$$

eine Isometrie ist.

- Wir definieren  $H \bullet M$  als den  $\mathcal{M}^2$ -Grenzwert von  $\{H^n \bullet M\}_{n \in \mathbb{N}}$ .



# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei





# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- $M$  ein lokales Martingal und



# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- $M$  ein lokales Martingal und
- $H$  ein vorhersagbarer Prozess mit  $H^2 \bullet \langle M \rangle(T) < \infty$  (ohne Erwartungswert).



# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- $M$  ein lokales Martingal und
- $H$  ein vorhersagbarer Prozess mit  $H^2 \bullet \langle M \rangle (T) < \infty$  (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge**  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$  ein  $L^2$ -Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle (T)] < \infty$  gilt.



# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- $M$  ein lokales Martingal und
- $H$  ein vorhersagbarer Prozess mit  $H^2 \bullet \langle M \rangle (T) < \infty$  (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge**  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$  ein  $L^2$ -Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle (T)] < \infty$  gilt.

Dann existiert ein Prozess  $H \bullet M$ , so dass

$$H \bullet M(\cdot \wedge \tau_k) = H \bullet M_k.$$



# Erweiterung des Integrals

Wir **erweitern das Integral** auf lokale Martingale und eine größere Klasse von Integranden. Dafür sei

- $M$  ein lokales Martingal und
- $H$  ein vorhersagbarer Prozess mit  $H^2 \bullet \langle M \rangle (T) < \infty$  (ohne Erwartungswert).

Wähle eine **lokalisierende Folge**  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass

- $M_k \triangleq M(\cdot \wedge \tau_k)$  ein  $L^2$ -Martingal ist und
- $\mathbb{E}[H^2 \bullet \langle M_k \rangle (T)] < \infty$  gilt.

Dann existiert ein Prozess  $H \bullet M$ , so dass

$$H \bullet M(\cdot \wedge \tau_k) = H \bullet M_k.$$

Das stochastische Integral  $H \bullet M$  ist dann automatisch ein **lokales Martingal**.

