Universität Trier

Existenz der quadratischen Variation

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
24. Mai 2017

Quadratische Variation

Definition (Quadratische Variation)

Quadratische Variation

Definition (Quadratische Variation)

Sei M ein lokales Martingal. Ein stetiger, adaptierter, wachsender Prozess $\langle M \rangle$ mit $\langle M \rangle(0) = 0$ heißt **quadratische Variation** von M, falls gilt:

$$M^2 - \langle M \rangle \qquad \text{ist ein lokales Martingal.}$$

Quadratische Variation

Definition (Quadratische Variation)

Sei M ein lokales Martingal. Ein stetiger, adaptierter, wachsender Prozess $\langle M \rangle$ mit $\langle M \rangle(0) = 0$ heißt **quadratische Variation** von M, falls gilt:

$$M^2 - \langle M \rangle \qquad \text{ist ein lokales Martingal.}$$

Es ist klar, dass die quadratische Variation eines lokalen Martingales **eindeutig bestimmt** ist. Es ist allerdings zunächst nicht klar, ob zu jedem lokalen Martingal eine quadratische Variation **existiert**.

Konstruktion der quadratischen Variation

Wir nennen $\pi = [t_0, \ldots, t_n]$ eine **Partition**, falls $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Wir schreiben

$$|\pi| \triangleq \max_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}|.$$

Konstruktion der quadratischen Variation

Wir nennen $\pi = [t_0, \ldots, t_n]$ eine **Partition**, falls $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Wir schreiben

$$|\pi| \triangleq \max_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}|.$$

Gegeben einer Partition π und einem lokalen Martingal M definieren wir einen stochastischen Prozess $\langle M \rangle_\pi$ durch

$$\langle M \rangle_\pi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} \big| \mathrm{d}M(t_{k-1}, t \wedge t_k) \big|^2, \qquad t \in [0, T].$$

Konstruktion der quadratischen Variation

Wir nennen $\pi = [t_0, \ldots, t_n]$ eine **Partition**, falls $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Wir schreiben

$$|\pi| \triangleq \max_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}|.$$

Gegeben einer Partition π und einem lokalen Martingal M definieren wir einen stochastischen Prozess $\langle M \rangle_\pi$ durch

$$\langle M \rangle_\pi(t) \triangleq \sum_{k=1}^{n} \big| \mathrm{d}M(t_{k-1}, t \wedge t_k) \big|^2, \qquad t \in [0, T].$$

Beachte: $\langle M \rangle_\pi$ ist offensichtlich stetig und adaptiert.

Konstruktion der quadratischen Variation

Proposition 22

Sei M ein L^2-Martingal. Dann ist der Prozess $M^2 - \langle M \rangle_\pi$ ein Martingal für jede Partition π.

Konstruktion der quadratischen Variation

Lemma 23

Sei M ein stetiges Martingal beschränkt durch $\alpha > 0$ und π eine Partition. Dann gilt

$$\mathbb{E}\big[\langle M \rangle_\pi(T)\big] \leq \alpha^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\big[\langle M \rangle_\pi(T)^2\big] \leq 8\alpha^4.$$

Konstruktion der quadratischen Variation

Theorem 24

Sei M ein durch $\alpha > 0$ beschränktes, stetiges Martingal. Dann existiert ein stetiger, wachsender Prozess $\langle M \rangle$, so dass

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} |\langle M\rangle_\pi(t) - \langle M\rangle(t)| \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{P})} \to 0 \qquad \text{für } |\pi| \downarrow 0.$$

Darüber hinaus ist der Prozess $M^2 - \langle M \rangle$ ein L^2-Martingal.

Konstruktion der quadratischen Variation

Korollar 25

Sei M ein lokales Martingal. Dann existiert ein stetiger, wachsender Prozess $\langle M \rangle$, so dass $M^2 - \langle M \rangle$ ein lokales Martingal ist. Außerdem gilt

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| \langle M \rangle_\pi(t) - \langle M \rangle(t) \right| \to 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit für } |\pi| \to 0.$$