

**Schwache Konvergenz im CRR Modell**

**Tutorium**  
**Stochastische Analysis und Mathematical Finance**  
17. Mai 2017



# Das $n$ -Perioden CRR Modell

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist das  $n$ -Perioden **Cox-Ross-Rubinstein Modell** gegeben durch

$$S_n^0(0) = s_0, \quad S_n^0(t) = s_0(1 + r_n)^{nt/T}, \quad t = \frac{1}{n}T, \frac{2}{n}T, \dots, T,$$

$$S_n^1(0) = s_1, \quad S_n^1(t) = s_1 \prod_{k=1}^{nt/T} (1 + R_n^k), \quad t = \frac{1}{n}T, \frac{2}{n}T, \dots, T,$$

wobei  $\{R_n^k\}_{k=1, \dots, n}$  u.i.v. mit

$$\mathbb{P}[R_n^1 = u_n] = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[R_n^1 = d_n] = 1 - p.$$



# Das $n$ -Perioden CRR Modell

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist das  $n$ -Perioden **Cox-Ross-Rubinstein Modell** gegeben durch

$$\begin{aligned} S_n^0(0) &= s_0, & S_n^0(t) &= s_0(1 + r_n)^{nt/T}, & t &= \frac{1}{n}T, \frac{2}{n}T, \dots, T, \\ S_n^1(0) &= s_1, & S_n^1(t) &= s_1 \prod_{k=1}^{nt/T} (1 + R_n^k), & t &= \frac{1}{n}T, \frac{2}{n}T, \dots, T, \end{aligned}$$

wobei  $\{R_n^k\}_{k=1, \dots, n}$  u.i.v. mit

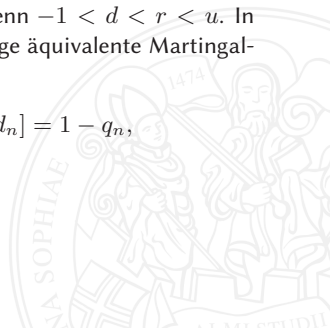
$$\mathbb{P}[R_n^1 = u_n] = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[R_n^1 = d_n] = 1 - p.$$

Das CRR Modell ist genau dann **frei von Arbitrage**, wenn  $-1 < d < r < u$ . In diesem Fall ist das Modell **vollständig** und das eindeutige äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{Q}_n$  ist gegeben durch

$$\mathbb{Q}_n[R_n^1 = u_n] = q_n \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}_n[R_n^1 = d_n] = 1 - q_n,$$

wobei

$$q_n \triangleq \frac{r_n - d_n}{u_n - d_n}.$$



# Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$C_n(0) =$$



# Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$C_n(0) = \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} \left[ \max\{S_n^1(T) - K, 0\} \right]$$



Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} \left[ \max\{S_n^1(T) - K, 0\} \right] \\ &= (1 + r_n)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q_n^k (1 - q_n)^{n-k} \max\{s_1(1 + u_n)^k (1 + d_n)^{n-k} - K, 0\} \end{aligned}$$



Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$\begin{aligned}C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} \left[ \max\{S_n^1(T) - K, 0\} \right] \\&= (1 + r_n)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q_n^k (1 - q_n)^{n-k} \max\{s_1(1 + u_n)^k (1 + d_n)^{n-k} - K, 0\} \\&= (1 + r_n)^{-n} \sum_{k=a}^n \binom{n}{k} q_n^k (1 - q_n)^{n-k} [s_1(1 + u_n)^k (1 + d_n)^{n-k} - K]\end{aligned}$$

wobei  $a$  die kleinste nicht-negative ganze Zahl ist, so dass

$$s_1(1 + u_n)^a (1 + d_n)^{n-a} > K,$$



# Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$\begin{aligned}C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} \left[ \max\{S_n^1(T) - K, 0\} \right] \\&= (1 + r_n)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q_n^k (1 - q_n)^{n-k} \max\{s_1(1 + u_n)^k (1 + d_n)^{n-k} - K, 0\} \\&= (1 + r_n)^{-n} \sum_{k=a}^n \binom{n}{k} q_n^k (1 - q_n)^{n-k} [s_1(1 + u_n)^k (1 + d_n)^{n-k} - K] \\&= s_1 \mathcal{B}(a; n, q_n \frac{1+u_n}{1+r_n}) - K(1 + r_n)^{-n} \mathcal{B}(a; n, q_n)\end{aligned}$$

wobei  $a$  die kleinste nicht-negative ganze Zahl ist, so dass

$$s_1(1 + u_n)^a (1 + d_n)^{n-a} > K,$$

und wobei

$$\mathcal{B}(a; n, q) \triangleq \sum_{k=a}^n \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}.$$





Aus dem Preis des Europäischen Calls

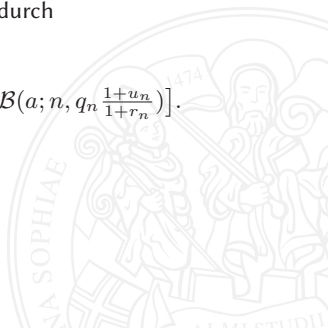
$$C_n(0) = s_1 \mathcal{B}(a; n, q_n \frac{1+u_n}{1+r_n}) - K(1+r_n)^{-n} \mathcal{B}(a; n, q_n)$$

und der Put-Call Parität

$$P_n(0) + S^1(0) = C_n(0) + K(1+r)^{-n}$$

folgt, dass der Preis des **Europäischen Puts** gegeben ist durch

$$\begin{aligned} P_n(0) &= C_n(0) + K(1+r)^{-n} - S^1(0) \\ &= K(1+r)^{-n} [1 - \mathcal{B}(a; n, q_n)] - s_1 [1 - \mathcal{B}(a; n, q_n \frac{1+u_n}{1+r_n})]. \end{aligned}$$



## Fragestellungen:

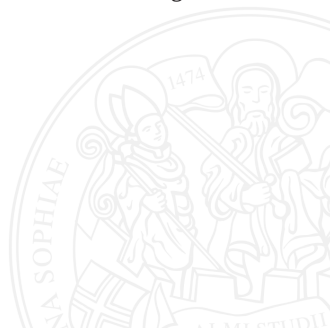
- Konvergiert das CRR Modell für  $n \rightarrow \infty$  gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?



## Fragestellungen:

- Konvergiert das CRR Modell für  $n \rightarrow \infty$  gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?

**Beachte:** Offensichtlich hängt die Konvergenz von der Wahl der Parameterfolge  $\{d_n, r_n, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ab. Die Wahl von  $p$  scheint keinen Einfluss auf die Konvergenz der Optionspreise zu haben.



## Fragestellungen:

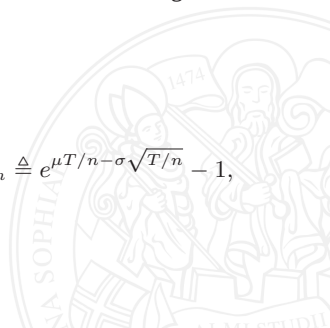
- Konvergiert das CRR Modell für  $n \rightarrow \infty$  gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?

**Beachte:** Offensichtlich hängt die Konvergenz von der Wahl der Parameterfolge  $\{d_n, r_n, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ab. Die Wahl von  $p$  scheint keinen Einfluss auf die Konvergenz der Optionspreise zu haben.

**Wir wählen:**  $p = 1/2$  sowie

$$r_n \triangleq e^{rT/n} - 1, \quad u_n \triangleq e^{\mu T/n + \sigma \sqrt{T/n}} - 1, \quad d_n \triangleq e^{\mu T/n - \sigma \sqrt{T/n}} - 1,$$

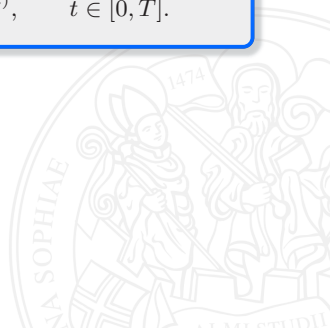
für geeignete Konstanten  $r, \mu, \sigma$ .



## Theorem

Das  $n$ -Perioden CRR-Modell konvergiert schwach gegen das zeitstetige Black-Scholes Modell  $S = \{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ , wobei

$$S^0(t) = s_0 e^{rt} \quad \text{und} \quad S^1(t) = s_1 e^{\mu t + \sigma W(t)}, \quad t \in [0, T].$$



# Konvergenz der Call Preise

