Universität Trier

Schwache Konvergenz im CRR Modell

Tutorium
Stochastische Analysis und Mathematical Finance
17. Mai 2017

Das n-Perioden CRR Modell

Für $n \in \mathbb{N}$ ist das n-Perioden **Cox-Ross-Rubinstein Modell** gegeben durch

$$\begin{aligned} S_n^0(0) &= s_0, \qquad & S_n^0(t) &= s_0(1+r_n)^{nt/T}, \qquad & t &= \tfrac{1}{n}T, \tfrac{2}{n}T, \ldots, T, \\ S_n^1(0) &= s_1, \qquad & S_n^1(t) &= s_1 \prod_{k=1}^{nt/T}(1+R_n^k), \qquad & t &= \tfrac{1}{n}T, \tfrac{2}{n}T, \ldots, T, \end{aligned}$$

wobei $\{R_n^k\}_{k=1,\ldots,n}$ u.i.v. mit

$$\mathbb{P}[R_n^1 = u_n] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[R_n^1 = d_n] = 1-p.$$

Das n-Perioden CRR Modell

Für $n \in \mathbb{N}$ ist das n-Perioden **Cox-Ross-Rubinstein Modell** gegeben durch

$$\begin{aligned} S_n^0(0) &= s_0, \qquad & S_n^0(t) &= s_0(1+r_n)^{nt/T}, \qquad & t &= \tfrac{1}{n}T, \tfrac{2}{n}T, \dots, T, \\ S_n^1(0) &= s_1, \qquad & S_n^1(t) &= s_1 \prod_{k=1}^{nt/T}(1+R_n^k), \qquad & t &= \tfrac{1}{n}T, \tfrac{2}{n}T, \dots, T, \end{aligned}$$

wobei $\{R_n^k\}_{k=1,\dots,n}$ u.i.v. mit

$$\mathbb{P}[R_n^1 = u_n] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[R_n^1 = d_n] = 1-p.$$

Das CRR Modell ist genau dann **frei von Arbitrage**, wenn $-1 < d < r < u$. In diesem Fall ist das Modell **vollständig** und das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}_n$ ist gegeben durch

$$\mathbb{Q}_n[R_n^1 = u_n] = q_n \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q}_n[R_n^1 = d_n] = 1-q_n,$$

wobei

$$q_n \triangleq \tfrac{r_n - d_n}{u_n - d_n}.$$

Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$C_n(0) =$$

Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$C_n(0) = \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left[\max\{S_n^1(T) - K, 0\}\right]$$

Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} \left[\max\{S_n^1(T) - K, 0\} \right] \\ &= (1+r_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \max\{s_1(1+u_n)^k(1+d_n)^{n-k} - K, 0\} \end{aligned}$$

Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left[\max\{S_n^1(T) - K, 0\}\right] \\ &= (1+r_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \max\{s_1(1+u_n)^k(1+d_n)^{n-k} - K, 0\} \\ &= (1+r_n)^{-n} \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \left[s_1(1+u_n)^k(1+d_n)^{n-k} - K\right] \end{aligned}$$

wobei a die kleinste nicht-negative ganze Zahl ist, so dass

$$s_1(1+u_n)^a(1+d_n)^{n-a} > K,$$

Call-Preise im CRR Modell

Der eindeutige arbitragefreie Preis eines **Europäischen Calls** ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
C_n(0) &= \frac{S_n^0(0)}{S_n^0(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left[\max\{S_n^1(T) - K, 0\}\right] \\
&= (1+r_n)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \max\{s_1(1+u_n)^k(1+d_n)^{n-k} - K, 0\} \\
&= (1+r_n)^{-n} \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \left[s_1(1+u_n)^k(1+d_n)^{n-k} - K\right] \\
&= s_1 \mathcal{B}(a; n, q_n \tfrac{1+u_n}{1+r_n}) - K(1+r_n)^{-n} \mathcal{B}(a; n, q_n)
\end{aligned}
$$

wobei a die kleinste nicht-negative ganze Zahl ist, so dass

$$s_1(1+u_n)^a(1+d_n)^{n-a} > K,$$

und wobei

$$\mathcal{B}(a; n, q) \triangleq \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$$

Put-Preise im CRR Modell

Aus dem Preis des Europäischen Calls

$$C_n(0) = s_1 \mathcal{B}(a; n, q_n \tfrac{1+u_n}{1+r_n}) - K(1+r_n)^{-n} \mathcal{B}(a; n, q_n)$$

und der Put-Call Parität

$$P_n(0) + S^1(0) = C_n(0) + K(1+r)^{-n}$$

folgt, dass der Preis des **Europäischen Puts** gegeben ist durch

$$\begin{aligned} P_n(0) &= C_n(0) + K(1+r)^{-n} - S^1(0) \\ &= K(1+r)^{-n}\left[1 - \mathcal{B}(a; n, q_n)\right] - s_1\left[1 - \mathcal{B}(a; n, q_n \tfrac{1+u_n}{1+r_n})\right]. \end{aligned}$$

Konvergenz im CRR Modells

Fragestellungen:

- Konvergiert das CRR Modell für $n \to \infty$ gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?

Konvergenz im CRR Modells

Fragestellungen:

- Konvergiert das CRR Modell für $n \to \infty$ gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?

Beachte: Offensichtlich hängt die Konvergenz von der Wahl der Parameterfolge $\{d_n, r_n, u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab. Die Wahl von p scheint keinen Einfluss auf die Konvergenz der Optionspreise zu haben.

Konvergenz im CRR Modells

Fragestellungen:

- Konvergiert das CRR Modell für $n \to \infty$ gegen ein zeitstetiges Modell?
- In welchem Sinne können wir Konvergenz erwarten?
- Konvergieren die Optionspreise?

Beachte: Offensichtlich hängt die Konvergenz von der Wahl der Parameterfolge $\{d_n, r_n, u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab. Die Wahl von p scheint keinen Einfluss auf die Konvergenz der Optionspreise zu haben.

Wir wählen: $p = 1/2$ sowie

$$r_n \triangleq e^{rT/n} - 1, \qquad u_n \triangleq e^{\mu T/n + \sigma\sqrt{T/n}} - 1, \qquad d_n \triangleq e^{\mu T/n - \sigma\sqrt{T/n}} - 1,$$

für geeignete Konstanten r, μ, σ.

Schwache Konvergenz des CRR Modells

Theorem

Das n-Perioden CRR-Modell konvergiert schwach gegen das zeitstetige Black-Scholes Modell $S = \{S(t)\}_{t\in[0,T]}$, wobei

$$S^0(t) = s_0 e^{rt} \qquad \text{und} \qquad S^1(t) = s_1 e^{\mu t + \sigma W(t)}, \qquad t \in [0, T].$$

Konvergenz der Call Preise