Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 14. Juni, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und

$$\tau \triangleq \inf\big\{t \geq 0 : W(t) = 1\big\}.$$

Sei $B = W(\cdot \wedge \tau)$ und definiere einen Prozess $M = \{M(t)\}_{t\in[0,1]}$ durch

$$M(t) \triangleq \begin{cases} B(t/(1-t)) & \text{falls } t \in [0,1), \\ 1 & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass M ein lokales Martingal aber kein echtes Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^M$ ist.

Aufgabe 2

Seien X und Y stetige, adaptierte Prozesse und $\pi = [t_0, \ldots, t_n]$ eine Partition. Definiere einen Prozess $\langle X, Y\rangle_\pi$ durch

$$\langle X, Y\rangle_\pi(t) \triangleq \textstyle\sum_{k=1}^n \mathrm{d}X(t_{k-1}, t \wedge t_k)\mathrm{d}Y(t_{k-1}, t \wedge t_k) \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass wenn X von endlicher Variation ist, dass dann

$$\sup_{t\in[0,T]} |\langle X, Y\rangle_\pi(t)| \to 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit für } |\pi| \downarrow 0.$$

Aufgabe 3

(i) Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Z_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|Z_n - Z\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{P})} \to 0 \text{ für eine Zufallsvariable } Z.$$

Zeigen Sie, dass $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in [0,\infty)$ und bestimmen Sie μ und σ^2.
Hinweis: Benutzen Sie charakteristische Funktionen.
(ii) Sei W eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung und $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}$ Borel-messbar mit $\int_0^T \sigma(t)^2 \mathrm{d}t < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sigma \bullet W(T) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ für gewisse $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_0^2 \in [0,\infty)$. Bestimmen Sie μ_0 und σ_0^2.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (i) dieser Aufgabe und Theorem 27.

Aufgabe 4

Sei M ein stetiges L^2-Martingal und A ein stetiger Prozess von endlicher Variation. Sei weiter $\alpha > 0$ umd $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge vorhersagbarer Prozesse mit

$$H_n(t,\omega) \to H(t,\omega) \quad \text{und} \quad |H_n(t,\omega)| \leq \alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big[\big|H_n \bullet A(t) - H \bullet A(t)\big| + \big|H_n \bullet M(t) - H \bullet M(t)\big|\Big] \to 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.