Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Universität Trier
Sommersemester 2017

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 24. Mai, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass der faire Preis der digitalen Call Option

$$C(T) = \mathbb{1}_{\{S^1(T)>K\}}$$

mit Strike $K > 0$ im Cox-Ross-Rubinstein Modell (Blatt 3, Aufgabe 3) mit $-1 < d < r < u$ gegeben ist durch

$$\hat{C}(0) = (1+r)^{-T} \sum_{k \geq a} \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k},$$

wobei $a \triangleq \min\{i \in \mathbb{N} : S^1(0)(1+u)^i(1+d)^{T-i} > K\}$ und $q \triangleq (r-d)/(u-d)$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die vorhersagbare σ-Algebra $\mathfrak{L}$ durch die stochastischen Intervalle

$$(\sigma, \tau] \triangleq \big\{(t,\omega) \in (0,T] \times \Omega : \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\big\}, \quad \sigma, \tau \text{ Stoppzeiten mit } \sigma \leq \tau,$$

erzeugt wird.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass jeder vorhersagbare Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in [0,T]}$ adaptiert ist.
Hinweis: Benutzen Sie ein Monotone-Klassen-Argument.

Aufgabe 4
Sei A stetig, adaptiert und monoton wachsend. Weiter sei H integrierbar bezüglich A. Zeigen Sie, dass der Stieltjes Integral Prozess $H \bullet A$ stetig und adaptiert ist.
Hinweis: Benutzen Sie dominierte Konvergenz für die Stetigkeit und ein Monotone-Klassen-Argument für die Adaptiertheit.