Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak



# Stochastische Analysis und Mathematical Finance

## Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 17. Mai, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

**Aufgabe 1**

Sei $S$ ein endlicher Finanzmarkt mit $d = 0$ und $S^0(t) = 1$ für alle $t = 0, \dots, T$. Weiter sei $C(T)$ eine $\mathfrak{F}(T)$-messbare, positive Zufallsvariable. Bestimmen Sie den fairen Preis von $C(T)$.

**Aufgabe 2**

Betrachte einen Finanzmarkt mit $d = 1$, $T = 1$, $\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}$, und $S^0(0) = S^0(1) = 1$. Wir nehmen an, dass der Investor eine Aktie $S^1$ nur zum Ask-Preis $S^{\text{ask}}$ kaufen und zum Bid-Preis $S^{\text{bid}}$ verkaufen kann, wobei

$$
\begin{array}{lll}
S^{\text{bid}}(0) = 3, & S^{\text{bid}}(1, \downarrow) = 2, & S^{\text{bid}}(1, \uparrow) = 4, \\
S^{\text{ask}}(0) = 5, & S^{\text{ask}}(1, \downarrow) = 3, & S^{\text{ask}}(1, \uparrow) = 6.
\end{array}
$$

Weiter nehmen wir an, dass in jedem Portfolio die Aktienposition zum Endzeitpunkt $T = 1$ liquidiert werden muss.

(i) Konstruieren Sie eine Handelsstrategie, so dass das Endvermögen (nach Liquidation der Aktienposition) einer Option $C$ mit Payoff $C(\downarrow) = 0$ und $C(\uparrow) = 2$ entspricht.

(ii) Konstruieren Sie eine Handelsstrategie, die einen größeren Payoff als $C$ hat, die aber weniger Startkapital benötigt als die Strategie aus (i).

**Aufgabe 3**

Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in [0,T]}$ eine vollständige, rechtsstetige Filtrierung, $\tau$ eine Stoppzeit bezüglich $\mathfrak{F}$ und $\sigma$ eine Zufallsvariable mit $\sigma = \tau$ fast sicher. Zeigen Sie, dass $\sigma$ eine Stoppzeit ist.

**Aufgabe 4**

Zeigen Sie, dass das Cox-Ross-Rubinstein Modell (Blatt 3, Aufgabe 3) mit $d, r, u \in \mathbb{R}$ und $-1 < d < u$ genau dann frei von Arbitrage ist, wenn $d < r < u$.