Prof. Dr. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Analysis und Mathematical Finance

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 10. Mai, 14:15 Uhr, Postkasten E14.

Aufgabe 1

Wir betrachten eine Aktie mit Dividendenzahlungen und nehmen an, dass der Aktienpreis unmittelbar vor einer Dividendenzahlung von $D > 0$ durch S gegeben ist. Wie hoch ist der Aktienpreis direkt nach der Dividendenzahlung? Begründen Sie Ihre Antwort mit Arbitrageargumenten.

Aufgabe 2

Sei $p(t, T) \leq 1$ für alle $T > 0$ und $t \in [0, T]$. Beweisen Sie die folgenden Preisschranken.

(i) Sei $C_1(T)$ ein Europäischer Call mit Laufzeit T und Strike K_1 und sei $C_2(T)$ ein Europäischer Call mit Laufzeit T und Strike $K_2 > K_1$. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq K_2 - K_1 \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

(ii) Sei $C_1(T_1)$ ein Europäischer Call mit Laufzeit T_1 und Strike K und sei $C_2(T_2)$ ein Europäischer Call mit Laufzeit $T_2 > T_1$ und Strike K. Zeigen Sie, dass

$$C_1(t) \leq C_2(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, T_1].$$

Aufgabe 3

Seien $-1 < d < r < u$ und $p \in (0, 1)$. Das Cox-Ross-Rubinstein Modell bzw. Binomialmodell ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$S^0(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad S^0(t) = S^0(t-1)(1+r) = (1+r)^t \qquad t = 1, \ldots, T,$$

$$S^1(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad S^1(t) = S^1(t-1)(1+R_t) = \prod_{u=1}^{t}(1+R_u) \qquad t = 1, \ldots, T,$$

wobei $\{R_t\}_{t=1,\ldots,T}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind und

$$\mathbb{P}[R_1 = u] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[R_1 = d] = 1 - p.$$

Sei weiter $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ der Payoff einer Option auf S^1 und $\mathfrak{F}$ die natürlich Filtrierung.

(i) Sei $T = 1$. Bestimmen Sie eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ, so dass

$$X^{\varphi}(T) = g(S^1(T)).$$

Eine solche Strategie nennen wir Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$.

(ii) Sei $T = 2$. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie für $g(S^1(T))$ für den Spezialfall

$$g(s) \triangleq \max\{s - K, 0\}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

unter der Annahme $K = (1+d)(1+u)$.

Aufgabe 4

Das Ein-Perioden Trinomialmodell ist gegeben durch einen Finanzmarkt $S = (S^0, S^1)$ mit

$$S^0(0) = 1,\ S^0(1) = 1 + r \qquad \text{und} \qquad S^1(1) = S^1(0)(1 + R),$$

wobei R eine Zufallsvariable ist mit

$$\mathbb{P}[R = d] = 1 - p - p', \quad \mathbb{P}[R = r] = p', \quad \mathbb{P}[R = u] = p$$

für $p, p' > 0$, $p + p' < 1$ und $-1 < d < r < u$.

(i) Für $s(1 + d) < K < s(1 + u)$ seien

$$C(T) \triangleq \max\{K - S^1(1), 0\} \qquad \text{und} \qquad F(T) \triangleq S^1(1) - K.$$

Gibt es Replikationsstrategien für $C(T)$ bzw. $F(T)$?

(ii) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße, d.h. bestimmen Sie alle Maße $\mathbb{Q}$, die äquivalent zu $\mathbb{P}$ sind, so dass der diskontierte Preisprozess $\bar{S}^1 \triangleq S^1/S^0$ ein Martingal unter $\mathbb{Q}$ ist.