Universität Trier

Die Viskositätseigenschaft der Wertfunktion

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Viskositätseigenschaft der Wertfunktion

Theorem 5.22 (Viskositätseigenschaft der Wertfunktion)

Angenommen, es existiert eine Lyapunov Funktion $\Psi_{\mathcal{V}}$ für $\mathcal{V}$, die Mengen $\mathbb{H}^+$ und $\mathbb{H}^-$ sind nicht-leer, die Hamilton Funktion H ist endlich und stetig und f ist gleichmäßig stetig. Dann gilt

$$\mathcal{V}(t,x) = \mathbb{V}^+(t,x) = \mathbb{V}^-(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$$

und $\mathcal{V}$ ist die eindeutige, stetige Viskositätslösung der HJB Gleichung (5.1) in der Menge aller lokal beschränkten Funktionen $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit Randwert $w_*(T,\cdot) = w^*(T,\cdot) = g$ auf $\mathcal{O}$ und Lyapunov Funktion $\Psi_{\mathcal{V}}$.

Bellman Prinzip

Theorem 5.23 (Bellman Prinzip)

Unter den Annahmen von Theorem 5.22 gilt das Bellman Prinzip, d.h. für alle $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und jede $\overline{\mathcal{T}}_t$-wertige Stoppzeit τ gilt

$$\mathcal{V}(t,x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t,x)} \mathrm{E}\Big[\int_t^\tau f\big(X_{t,x}^\nu(r), \nu(r)\big)\mathrm{d}r + \mathcal{V}\big(\tau, X_{t,x}^\nu(\tau)\big)\Big].$$